Math. P.
740
Z

Math. P. 740 z

A 22

Algebraische Aufgaben

aus dem

ganzen Gebiet der reinen Mathematik

mit Angabe der Resultate.

Kön. Preuss. Ministerial ... Bibliothek

Als Ergänzung

zu

Meier Hirsch Sammlung von Beispielen rc.

so wie auch zum selbstständigen Gebrauch

Bayerische Staatsbibliothek München

bearbeitet

von

Dr. D. C. L. Lehmus

Professor der Mathematik an der Königlichen vereinigten Artillerie- und Ingenieur-Schule und dem Haupt-Bergwerks-Eleven-Institut in Berlin.

Bayer. Staatsministerium f. Ernährg. Landwirtschaft u. Forsten Ministerialforstabteilung Bücherei 1808 A a 1

KGL. BAY. MINISTERIALFORSTBUREAU 696 42

Berlin, 1846.

Verlag von Duncker und Humblot.

Gd/63/3121

Bayerische
Staatsbibliothek
MÜNCHEN

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Vorrede.

Die algebraischen Aufgaben von Meier Hirsch finden noch immer großen Beifall, bei weitem weniger seine geometrischen Aufgaben; wohl aus dem Grunde, weil die Lösungen und nicht bloß die Resultate beigefügt sind. Eine Sammlung algebraischer Aufgaben, wozu der Stoff aber aus dem ganzen Gebiet der reinen Mathematik, so weit sie auf Schulen vorgetragen wird, entnommen ist, doch ohne Lösungen, bloß mit Angabe der Resultate, wie in den algebraischen Aufgaben von Meier Hirsch, erscheint vielleicht wünschenswerth, und aus diesem Grund hat sich der Verfasser, angeregt durch die Verlagshandlung, zu Bearbeitung dieser kleinen Sammlung bewogen gefunden. Figuren sind nicht beigefügt, sondern vom Schüler, dem Text entsprechend, selbst zu entwerfen, auch nur wenige bloße

Rechenexempel. Die Anordnung entspricht dem Lehrbuch des Verfassers: (die reine Mathematik und die mechanischen Wissenschaften. Berlin 1845 in Verlag von Duncker und Humblot.)

Berlin, Januar 1846.

Der Verfasser.

Inhalt.

Erste Abtheilung.

Aufgaben aus der Arithmetik.

Seite

I. Aufgaben aus der Arithmetik ohne Zuziehung des dekadischen Zahlensystems. Nr. 1 — 100. . . . . 1 — 6

II. Aufgaben aus der Arithmetik mit Zuziehung des dekadischen Zahlensystems. Nr. 1 — 127. . . . . 7 — 19

Zweite Abtheilung.

Aufgaben welche auf algebraische Gleichungen mit einem Unbekannten führen.

III. Algebraische Gleichungen mit einem Unbekannten zu ordnen. Nr. 1 — 12. . . . . 20 — 23

IV. Aufgaben welche auf algebraische Gleichungen vom ersten Grad führen. Nr. 1 — 120. . . . . . . 23 — 43

V. Aufgaben welche auf algebraische Gleichungen vom zweiten Grad führen. Nr. 1 — 50. . . . . . . 43 — 51

VI. Aufgaben welche auf algebraische Gleichungen von höhern Graden führen. Nr. 1 — 22. . . . . 52 — 55

Dritte Abtheilung.

Aufgaben welche auf algebraische Gleichungen mit mehr Unbekannten führen.

VII. Vermischte, ohne Anordnung nach der Anzahl der Unbekannten und dem Grade der entstehenden Endgleichung. Nr. 1 — 49. . . . . 56 — 67

VIII. Anwendungen des Satzes von den unbestimmten Coefficienten. Nr. 1 — 18. . . . . 67 — 71

IX. Unbestimmte Aufgaben. Nr. 1 — 27. . . . . 71 — 76

Vierte Abtheilung.

Algebraische Aufgaben aus den geometrischen Wissenschaften.

		Seite
X.	Aufgaben aus der ebenen Geometrie. Nr. 1 — 47.	77 — 91
XI.	Aufgaben aus der ebenen Trigonometrie. Nr. 1 — 68.	91 — 112
XII.	Aufgaben aus der Körperlehre und sphärischen Trigonometrie. Nr. 1 — 46.	112 — 128
XIII.	Aufgaben aus der Coordinaten-Theorie nnd den Kegelschnitten. Nr. 1 — 32.	128 — 138

Anhang.

XIV.	Aufgaben welche auf transcendente Gleichungen führen. Nr. 1 — 14.	138 — 141

Bedeutung der gebrauchten Zeichen.

Es bezeichnet

R. das Resultat der Lösung einer Aufgabe;

π die Zahl 3,14159 ..., d. h. die Länge der Peripherie eines Kreises, wenn sein Durchmesser als Längen-Einheit angenommen wird;

i die Zahl, deren Quadrat -1 ist, also den Ausdruck $\sqrt{-1}$, absolut gedacht;

(n) das Product der natürlich auf einander folgenden ganzen Zahlen von 1 bis n, wobei also n selbst jede beliebige ganze absolute Zahl vorstellt;

a_n den Ausdruck $\frac{a\cdot(a-1)(a-2)\ldots(a+2-n)(a+1-n)}{1\ \cdot\ 2\ \cdot\ 3\ \ldots\ (n-1)\ \cdot\ n}$;

$P_{(\alpha)}$ auch bloß P_α einen Ausdruck, der α enthält und dann

$P_{(\alpha=b)}$ oder auch blos P_b denselben Ausdruck, wenn überall in demselben b für α gesetzt wird, z. B. $(2a+3)_{a=5}$ oder $(2a+3)_5$ die Zahl 13.

Bemerkungen.

Das Wort „Bogenwinkel" bezeichne einen Winkel, aber nicht in Graden und Unterabtheilungen des Grades, sondern im Längenmaaß des Bogens, den Halbmesser als Längen-Einheit genommen, ausgedrückt.

Kommen vor den Aufgaben aus der Trigonometrie cubische Gleichungen vor, so sind die Wurzeln durch die Cardanische Formel, und wenn der irreductible Fall eintritt, durch die Methode der Grenzen zu bestimmen.

Verbesserungen.

Seite 29, Aufgabe 45, Z. 4. lies: zur größeren Zahl für: zur entstandenen Differenz

— 37, Aufgabe 90, lies: $\frac{m_2}{n_2}$ für: $\frac{m^2}{n^2}$

— 56, Aufgabe 1, lies: welche zwei Ausdrücke für: welche Ausdrücke

— 60, Aufgabe 23, Z. 1. lies: Product und Differenz der Quadrate für: Differenz und Product

— 65, Aufgabe 43, Z. 4 lies: zweiten $= a_2$ für: zweiten

— 105, Aufgabe 48, Z. 12. lies: $2P$ für: $_2P$

— 108, Anmerkung zu Aufgabe 56, Z. 9. lies: DAF (oder γ) $= \beta$ für: $DAF = \beta$

— 116, Aufgabe 13, Z. 6. lies: $\cos\varphi = -0{,}0216\pi\sqrt{3}$ für: $\cos\varphi = 0{,}0216\pi\cdot\sqrt{3}$

— 125, Aufgabe 38 ist zum Resultat noch zuzusetzen:
Die beiden gleichen Winkel λ, welche die Bogen ψ nach den Endpuncten von a mit dem Bogen a einschließen, bestimmen sich dann aus $\cos\lambda = \mathrm{tg}\frac{a}{2}\,\mathrm{cotg}\,\psi$ und der von diesen beiden Bogen ψ eingeschlossene dem Bogen a gegenüber liegende Winkel δ durch $\sin\frac{\delta}{2} = \sin\frac{a}{2}\,\mathrm{cosec}\,\psi$.

Bayerische Staatsbibliothek MÜNCHEN

Erste Abtheilung.

Arithmetische Aufgaben.

I. Arithmetische Aufgaben ohne Anwendung des dekadischen Zahlensystems.

1) $a - b - c + d = a + d - (b + c)$
$= a - b - (c - d)$
$= a - c - (b - d)$
2) $a - (a - b) = b$
3) $a - b - (a - c) - (c - b) = 0$
4) $a - b - c - (d - b) - (a - c) = -d$
5) $-(a - b) - (b - a) = 0$
6) $a - b - (a - c - b) = c$
7) $(a + b)(c + d) = ac + bc + ad + bd$
8) $(a + b)(c - d) = ac + bc - ad - bd$
9) $(a - b)(c - d) = ac - bc - ad + bd$
10) $(a + 2)(a + 3) = aa + 5a + 6$
11) $(a - 2)(a + 3) = aa + a - 6$
12) $(a - 2)(a - 3) = aa - 5a + 6$
13) $3a + ab = (3 + b)a$
14) $ab - a = (b - 1)a$
$= -(1 - b)a$
15) $ab + bc + 2a + 2c = (a + c)(b + 2)$
16) $3ab + 3a - b - 1 = (3a - 1)(b + 1)$

17) $5aa + 5ab - 3a - 3b = (5a - 3)(a + b)$
18) $aa + 6a + 5 = (a + 1)(a + 5)$
19) $aa + 2a - 8 = (a + 4)(a - 2)$
20) $aa - 2a - 8 = (a - 4)(a + 2)$
21) $aa - 5a + 4 = (a - 4)(a - 1)$
22) $(ab + 3a) : (b + 3) = a$
23) $(2a + 6) : (a + 3) = 2$
24) $(2aa + 7ab + 6bb) : (2a + 3b) = a + 2b$
25) $(6aa - 7ab + 2bb) : (2a - b) = 3a - 2b$
26) $(aa - 2ab - 3bb) : (a + b) = a - 3b$
27) $(2aa + 3ab - 2bb) : (2a - b) = a + 2b$
28) $(2aa - 5ab + 5ac + 3bb - 7bc + 2cc) : (a - b + 2c)$
$= 2a - 3b + c$

29) $\left(\frac{4}{3}aa + \frac{7}{9}ab - \frac{7}{6}a - \frac{bb}{6} + \frac{b}{2} - \frac{3}{8}\right) : \left(\frac{2}{3}a + \frac{b}{2} - \frac{3}{4}\right)$
$= 2a - \frac{b}{3} + \frac{1}{2}$

30) $\left(2aa - \frac{3}{2}ab + 2a + \frac{bb}{4} - \frac{3b}{4} + \frac{1}{2}\right) : \left(a - \frac{b}{2} + \frac{1}{2}\right)$
$= 2a - \frac{b}{2} + 1$

31) $\frac{1}{1-a} = 1 + \frac{a}{1-a}$

$= 1 + a + \frac{aa}{1-a}$

$= 1 + a + aa + \frac{aaa}{1-a}$

u. s. f. auch

$= 1 + a + aa + aaa + aaaa + \ldots$ *in inf.*

32) $\frac{1}{1-a} = -\frac{1}{a} + \frac{1}{a(1-a)}$

$= -\frac{1}{a} - \frac{1}{aa} + \frac{1}{aa(1-a)}$

$$= -\frac{1}{a} - \frac{1}{aa} - \frac{1}{aaa} + \frac{1}{aaa(1-a)}$$

u. s. w. auch

$$= -\frac{1}{a} - \frac{1}{aa} - \frac{1}{aaa} - \frac{1}{aaaa} - \ldots \textit{ in inf.}$$

33) $(ac-bc):(3a-3b+ac-bc) = \frac{c}{3+c}$

34) $(2ac+6bd-4ad-3bc):(ac-2bc-2ad+4bd)$

$= \frac{2a-3b}{a-2b}$

35) $\frac{aa+5a+6}{aa+4a+3} = \frac{a+2}{a+1}$

36) $\frac{aa+a-2}{aa-a-6} = \frac{a-1}{a-3}$

37) $\frac{2aa-5a+3}{aa-3a+2} = \frac{2a-3}{a-2}$

38) $\frac{aa-4a+3}{aa-5a+6} = \frac{a-1}{a-2}$

39) $\frac{aa+4a+3}{aa+3a+2} - \frac{a-1}{a+2} = \frac{4}{a+2}$

40) $\left(\frac{a}{ab+bc} + \frac{3}{2a+2c}\right):\frac{4ac+6bc}{3aa+3ac} = \frac{3a}{4bc}$

41) $\left(\frac{2a}{ab+2b+3a+6} + \frac{a}{ab+2b+a+2}\right):\frac{3b+5}{bb+4b+3}$

$= \frac{a}{a+2}$

42) $\left(\frac{aa-9}{a-3}\right)_{a=3} = 6$

43) $\left(\frac{aa+2a-3}{aa+4a+3}\right)_{a=-3} = 2$

44) $\left(\frac{aa-a-6}{aa-2a-3}\right)_{a=3} = \frac{5}{4}$

45) $\left(\frac{a}{a-2} - \frac{6}{aa-a-2}\right)_{a=2} = \frac{5}{3}$

46) $\left(\frac{6}{aa+6a+8}:\frac{5}{aa+3a-4}\right)_{a=-4} = 3$

47) $\left[\frac{1}{a-2}\left(\frac{1}{2}+\frac{a}{a-6}\right)\right]_{a=2} = -\frac{3}{8}$

48) $\left[\frac{1}{a-3}\left(a-\frac{3}{a-2}\right)\right]_{a=3} = 4$

49) $(-1)_4 = 1$

50) $(-1)_5 = -1$

51) $\left(\frac{3}{2}\right)_2 = \frac{3}{8}$

52) $\left(-\frac{2}{3}\right)_2 = \frac{5}{9}$

53) $a^n \cdot a^{m-n} = a^m$

54) $a^{n-3} : a^{n-4} = a$

55) $3a^3 + 2a^2 = a^2(3a+2)$

56) $6a^{n-3} - 3a^{n-4} = 3(2a-1)a^{n-4}$

57) $a^3b^2 + ab^3 = ab^2(a^2+b)$

58) $a^4b^3 - a^5b^2 = a^4b^2(b-a)$

59) $a^5 - a^3b - 6ab^2 = a(a^2+2b)(a^2-3b)$

60) $a^3 - ab^2 + a^2b - b^3 = (a^2-b^2)(a+b)$
$= (a-b)(a+b)^2$

61) $a^3 - a^2b - ab^2 + b^3 = (a^2-b^2)(a-b)$
$= (a+b)(a-b)^2$

62) $(a+b)^2 - (a^2+b^2) = 2ab$

63) $(a-b)^2 - (a^2-b^2) = 2b(b-a)$
$= -2b(a-b)$

64) $\frac{a^3-b^3}{a^2-b^2} = \frac{a^2+ab+b^2}{a+b}$

65) $\frac{a^5+b^5}{a^3+b^3} = \frac{a^4+b^4}{a^2-ab+b^2} - ab$

66) $\left(\frac{a^3-b^3}{a^2-b^2}\right)_{b=a} = \frac{3}{2}a$

67) $\left(\frac{a^5+b^5}{a^3+b^3}\right)_{a=-b} = \frac{5}{3}b^2$

68) $\left(\frac{a^m-b^m}{a^n-b^n}\right)_{b=a} = \frac{m}{n}a^{m-n}$

69) $(a^4+2a^3b+a^2b^2-4ab^3-6b^4):(a^2+2ab+3b^2)$
$= a^2-2b^2$

70) $\left(\frac{a^4}{2}-\frac{5a^3b}{4}+\frac{a^2b^2}{2}-\frac{ab^3}{2}-\frac{2b^4}{9}\right):\left(\frac{a^2}{2}-ab-\frac{b^2}{3}\right)$
$= a^2-\frac{ab}{2}+\frac{2b^2}{3}$

71) $\frac{1-2a+3a^2}{1+a} = 1-3a+6a^2\,(1-a+a^2-a^3+-\ldots \mathit{in\,inf.})$

72) $\frac{1-3a+2a^2}{1-a} = 1-2a$

73) $\frac{1-2a+3a^2}{1-a} = 1-a+2a^2\,(1+a+a^2+a^3+\ldots \mathit{in\ inf.})$

74) $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[m]{a} = \sqrt[nm]{a^{n+m}}$

75) $\sqrt[n]{a^r}:\sqrt[m]{a^p} = \sqrt[nm]{a^{mr-np}}$

76) $\sqrt{a^3b}+\sqrt{ab^3} = (a+b)\sqrt{ab}$

77) $3\sqrt{\tfrac{1}{2}}-2\sqrt{2} = -\sqrt{\tfrac{1}{2}} = -\tfrac{1}{2}\sqrt{2}$

78) $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{\tfrac{1}{4}} = \tfrac{3}{2}\sqrt[3]{2}$
$= 3\cdot\sqrt[3]{\tfrac{1}{4}}$

79) $\frac{2+2\sqrt[3]{4}}{2+\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{4}$

80) $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \sqrt{3}+\sqrt{2}$

81) $(\sqrt{3}+2\sqrt{2})\,(2\sqrt{3}-\sqrt{2}) = 2+3\sqrt{6}$

82) $\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \tfrac{1}{2}(2-\sqrt{2})^2$
$= 3-2\sqrt{2}$

83) $\frac{\sqrt[3]{2}+1}{\sqrt[3]{2}-1} = 3 + 2\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{4}$

84) $\log(a^n b^m : \sqrt[p]{c}) = n \log a + m \log b - \frac{\log c}{p}$

85) $b \log a - c \log d + \frac{\log h}{k} = \log\left(\frac{a^b \cdot \sqrt[k]{h}}{d^c}\right)$

86) $\overset{3}{\log} a = \overset{4}{\log} a \cdot \overset{3}{\log} 4$

87) $\overset{8}{\log} 7 = \frac{\overset{a}{\log} 7}{\overset{a}{\log} 8}$

88) $\overset{6}{\log} 9 = \frac{\overset{6}{\log} a}{\overset{9}{\log} a}$

89) $(1 + a - a^2)^2 = 1 + 2a - a^2 - 2a^3 + a^4$

90) $(1 - 2a + a^2 - a^3)^2 =$
$1 - 4a + 6a^2 - 6a^3 + 5a^4 - 2a^5 + a^6$

91) $(1 - a - a^2)^3 = 1 - 3a + 5a^3 - 3a^5 - a^6$

92) $\sqrt{(a^3 - a^2b - ab^2 + b^3)} = (a - b)\sqrt{(a + b)}$

93) $\sqrt{(a^3 + a^2b - ab^2 - b^3)} = (a + b)\sqrt{(a - b)}$

94) $\sqrt{(a^3 - 2a^2b - 4ab^2 + 8b^3)} = (a - 2b)\sqrt{(a + 2b)}$

95) $\sqrt{\left[\left(\frac{a+b}{8}\right)^2 \cdot \frac{(a+b)^2 + 4ab}{ab} - \frac{b^2}{4}\right]}$
$= \frac{a^2 + 4ab - b^2}{8ab}\sqrt{ab}$

96) $\sqrt{(5 - 2\sqrt{6})} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$

97) $\sqrt{(3 + 2\sqrt{2})} = 1 + \sqrt{2}$

98) $\sqrt{(-1 + 2i\sqrt{2})} = 1 + i\sqrt{2}$

99) $\sqrt{+2i} = 1 + i$

100) $\sqrt{-2i} = 1 - i$

II. Arithmetische Aufgaben mit Zuziehung des dekadischen Zahlensystems.

1) $12 + 5 \cdot 6 - 21 : 3 = 35$
2) $(12 + 5) \cdot 6 - 21 : 3 = 95$
3) $12 + 5 \cdot (6 - 21 : 3) = 7$
4) $(12 + 5 \cdot 6 - 21) : 3 = 7$
5) $(12 + 5) \cdot (6 - 21) : 3 = -85$
6) $[(12 + 5) \cdot 6 - 21] : 3 = 27$
7) $[12 + 5 \cdot (6 - 21)] : 3 = -21$
8) $(12 + 5) \cdot (6 - 21 : 3) = -17$
9) Wie müssen in dem Ausdruck

$$4 \cdot 6 + 2 \cdot 8 - 10 : 2$$

die Klammern angebracht werden, damit die Resultate 15; 203; 30; 48; 78; 83; 99; —26; 27; 36; 22; 68; 24; 251; 96; —32; 39; 10; 108; 4; 16; 236 und 123 entstehen?

Werden in Klammern zu schließende Verbindungen durch Buchstaben angezeigt, so sind die verlangten Darstellungen nach der Folge: $a : 2$; $a \cdot 8 - 10 : 2$; $4 \cdot 6 + 2 \cdot a$; $4 \cdot (6 + 2 \cdot a)$; $a \cdot b$; $4 \cdot a - 10 : 2$; $(a \cdot 8 - 10) : 2$; $a \cdot b : 2$; $4 \cdot 6 + a : 2$; $4 \cdot (6 + a : 2)$; $4 \cdot 6 + 2 \cdot a : 2$; $4 \cdot a$; $4 \cdot a : 2$; $4 \cdot a \cdot 8 - 10 : 2$; $4 \cdot a \cdot b$; $4 \cdot a \cdot b : 2$; $(4 \cdot a - 10) : 2$; $(4 \cdot 6 + 2 \cdot a) : 2$; $4 \cdot (a \cdot 8 - 10) : 2$; $4 \cdot (6 + 2 \cdot a) : 2$; $4 \cdot (6 + 2 \cdot a : 2)$; $4 \cdot (a \cdot 8 - 10 : 2)$; $(4 \cdot a \cdot 8 - 10) : 2$

10) $\frac{3}{5} - \frac{4}{3} : \frac{15}{11} + \frac{2}{3} = \frac{13}{45}$

11) Welches sind in Beziehung auf 10) bei der in 9) angegebenen Zeichensprache, die Resultate folgender Darstellungen, $a : \frac{15}{11} + \frac{2}{3}$; $\frac{3}{5} - \frac{4}{3} : a$ und $a : b$?

R. $\frac{29}{225}$; $-\frac{19}{335}$; $-\frac{121}{335}$

12) $0{,}342 + 1{,}237 : 0{,}25 - 1{,}234 = 4{,}056\ldots$

13) $(0{,}342 + 1{,}237) : 0{,}25 - 1{,}234 = 5{,}082\ldots$

14) $0{,}342 + 1{,}237 : (0{,}25 - 1{,}234) = -0{,}915\ldots$

15) $(0{,}342 + 1{,}237) : (0{,}25 - 1{,}234) = -1{,}604\ldots$

16) $\dfrac{\frac{2}{3} - \frac{3}{4} : \frac{4}{5} + \frac{1}{2}}{\left(\frac{2}{3} - \frac{3}{4}\right) : \frac{4}{5} + \frac{1}{2}} \cdot \dfrac{\frac{2}{3} - \frac{3}{4} : \left(\frac{4}{5} + \frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{2}{3} - \frac{3}{4}\right) : \left(\frac{4}{5} + \frac{1}{2}\right)} = -\dfrac{77}{95}$

17) $\dfrac{\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7} + \frac{1}{2} : \frac{7}{15}}{\frac{2}{5} \cdot \left(\frac{3}{7} + \frac{1}{2}\right) : \frac{7}{15}} : \dfrac{\frac{2}{5} \cdot \left(\frac{3}{7} + \frac{1}{2} : \frac{7}{15}\right)}{\left(\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7} + \frac{1}{2}\right) : \frac{7}{15}} = \dfrac{1363}{364}$

18) $0{,}538461538461538461\ldots$ *in inf.* $= \dfrac{7}{13}$

19) $0{,}415151515\ldots$ *in inf.* $= \dfrac{137}{330}$

20) $0{,}11234234234\ldots$ *in inf.* $= \dfrac{1247}{11100}$

21) $0{,}121333333\ldots$ *in inf.* $= \dfrac{91}{750}$

22) Wenn 6 Arbeiter in 9 Tagen 8 Morgen Land umgraben, wie viel wird in derselben Zeit von 4 eben so fleißigen und kräftigen Arbeitern geleistet?

R. $5\frac{1}{3}$ Morgen.

23) Wie viel fördern aber, bei derselben Voraussetzung 6 Arbeiter in 10 Tagen?

R. $8\frac{8}{9}$ Morgen.

24) Wie viel Tage brauchen dieselben zu 10 Morgen?

R. $11\frac{1}{4}$ Tage.

25) Wie viel Tage 8 Arbeiter zu diesen 8 Morgen?

R. $6\frac{3}{4}$ Tage.

26) Wenn aber, immer unter der Voraussetzung in 22), nur 4 Morgen in den 9 Tagen bearbeitet werden sollen, wie viele solche Arbeiter sind erforderlich?

R. 3 Arbeiter.

27) Und wie viele, wenn 27 Tage zu diesen 8 Morgen zu verwenden sind?

R. 2 Arbeiter.

28) Wie viele Morgen werden aber von 5 Mann in 16 Tagen gegraben?

R. $11\frac{23}{27}$ Morgen.

29) Und wie viel Tage sind zu 5 Morgen für 7 Mann erforderlich?

R. $4\frac{23}{28}$ Tage.

30) Wie viele Arbeiter aber würden dann zu 32 Morgen in 12 Tagen nöthig sein?

R. 18 Arbeiter.

31) Wenn angenommen wird daß der Preis des Brodes blos von dem des Kornes abhängig ist und (bei dieser und den folgenden 8 Aufgaben) c die Menge Brod bezeichnet, welche für die Summe b beim Kornpreis a zu liefern ist, so soll bestimmt werden wie viel Brod bei diesem Kornpreis a für die Summe d erhalten wird.

R. $\frac{cd}{b}$

32) Wie viel Brod für diese Summe b beim Kornpreis d zu liefern ist.

R. $\frac{ac}{d}$

33) Welche Summe beim Kornpreis a für die Brodmenge d zu zahlen ist.

R. $\frac{bd}{c}$

34) Welche Summe für die Menge c beim Kornpreis d gezahlt werden muß.

R. $\frac{bd}{a}$

35) Bei welchem Kornpreis die Menge c für die Summe d erfolgt.

R. $\frac{ad}{b}$

36) Bei welchem Kornpreis die Menge d für die Summe b erhalten wird.

R. $\frac{ac}{d}$

37) Welche Menge Brod für die Summe e beim Kornpreis d zu liefern ist.

R. $\frac{ace}{bd}$

38) Welche Summe für die Menge e beim Kornpreis d gezahlt werden muß.

R. $\frac{bde}{ac}$

39) Bei welchem Kornpreis die Menge e für die Summe d erfolgt.

R. $\frac{acd}{be}$

40) Wenn 16, 3, 2 die Verhältnißzahlen von Salpeter, Kohle und Schwefel zu gutem Schießpulver sind; wie viel ist dann von jedem Material zu 210 Centner Pulver erforderlich?

R. 160; 30; 20

41) Drei Personen A, B, C kaufen ein Lotterieloos für die Summe s; A zahlt hiezu die Summe a; B die b und C das Fehlende; ihr Gewinn sei durch h ausgedrückt, wie ist derselbe zu theilen?

R. A erhält die Summe $\frac{ah}{s}$; B die $\frac{bh}{s}$ und C die $\frac{(s-a-b)h}{s}$

42) Es pachten vier Personen A, B, C, D gemeinschaftlich eine Hütung für die Summe s;

A läßt a Ochsen α Wochen
B „ b „ β „

C läßt c Ochsen γ Wochen
D " d " δ " weiden;

wie viel haben diese vier Personen A, B, C, D nach der Reihefolge zu bezahlen?

R. Wird $s:(a\alpha+b\beta+c\gamma+d\delta)$ durch p bezeichnet, so sind diese Beiträge $a\alpha p$; $b\beta p$; $c\gamma p$ und $d\delta p$.

43) $97_{95}=4656$

44) $105_{100}=96560646$

45) $\left(\frac{2}{3}\right)_4+\left(\frac{2}{3}\right)_3=\frac{5}{243}$

46) $\left(\frac{7}{5}\right)_3-\left(\frac{2}{5}\right)_3=-\frac{3}{25}$

47) $\frac{15^7\cdot 231^9}{9^8\cdot 77^9\cdot 25^3}=5$

48) $\frac{13^2:\left(\frac{15}{11}\right)^3}{143^2:30^3}=88$

49) $\left(\frac{3}{5}\right)^3:\left(\frac{9}{20}\right)^2-\frac{7^2:225}{49:15}=1$

50) $\frac{15^{\frac{3}{4}}\cdot\sqrt{20}}{\sqrt[8]{25^5}\cdot\sqrt[4]{\frac{1}{3}}}=6$

51) $\frac{26^{\frac{2}{3}}\cdot 39^{-\frac{3}{4}}\cdot 9^{\frac{1}{8}}\cdot\sqrt[12]{13}}{12^{-\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{2}{3}}}=2$

52) $\frac{25^{\frac{9}{14}}\cdot 9^{\frac{13}{56}}\cdot\sqrt[28]{(\sqrt{2})^{89}}\cdot\left(\frac{7}{12}\right)^{\frac{3}{4}}}{\sqrt[-7]{\left(\frac{5}{6}\right)^{-2}}\cdot\sqrt[8]{(2\cdot 7^2)^3}}=5$

53) Welches sind die aufeinander folgenden Näherungsbrüche zu $\frac{1117}{2531}$?

R. $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{7}$; $\frac{4}{9}$; $\frac{15}{34}$; $\frac{79}{179}$; $\frac{173}{392}$

54) Welches die zu 0,14159?

R. $\frac{1}{7}$; $\frac{15}{106}$; $\frac{16}{113}$; $\frac{415}{2931}$

55) Welches die zu $\sqrt{2}$?

R. $\frac{3}{2}$; $\frac{7}{5}$; $\frac{17}{12}$; $\frac{41}{29}$ . . .

56) Welches die zu $\sqrt{3}$?

R. $\frac{5}{3}$; $\frac{7}{4}$; $\frac{19}{11}$; $\frac{26}{15}$ . . .

57) Welches die zu $\sqrt[3]{2}$?

R. $\frac{4}{3}$; $\frac{5}{4}$; $\frac{29}{23}$; $\frac{34}{27}$ . . .

58) Welches die zu $\sqrt[3]{3}$?

R. $\frac{3}{2}$; $\frac{10}{7}$; $\frac{13}{9}$; $\frac{62}{43}$; $\frac{75}{52}$ . . .

59) $2\sqrt{108} + 7\sqrt{75} + 3\sqrt{147} = 68\sqrt{3} = 117{,}7794\ldots$

60) $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{7}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{3}} - \frac{3}{8}\sqrt{84} - \frac{5}{3}\sqrt{189} = -\frac{461}{84}\sqrt{21}$
$= -25{,}1496\ldots$

61) $2\cdot\sqrt[3]{40} - 3\cdot\sqrt[3]{135} + 4\cdot\sqrt[3]{320}$
$= 11\cdot\sqrt[3]{5} = 18{,}80973\ldots$

62) $\sqrt[3]{\frac{1}{12}} + \frac{5}{3}\sqrt[3]{\frac{9}{4}} - \frac{1}{3}\sqrt[3]{144} = \sqrt[3]{\frac{2}{3}} = 0{,}87358\ldots$

63) $a\sqrt{(704\,b^3c)} - 3\sqrt{(44bc^3)} = (8ab - 6c)\sqrt{(11bc)}$

64) $2\sqrt{\frac{5a}{3b}} + 4\sqrt{\frac{5b}{3a}} - 3\sqrt{\left(\frac{3}{5}a^3b\right)} =$
$\frac{10a + 20b - 9a^2b}{15ab}\sqrt{15ab}$

65) $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} + \sqrt[3]{\frac{b^2}{a^2}} = \frac{a+b}{ab}\sqrt[3]{ab^2}$

66) $\sqrt{(8x^3 + 12x^2y - 18xy^2 - 27y^3)}$
$= (2x + 3y)\sqrt{(2x - 3y)}$

67) $\sqrt{(a^4 + 6a^3 + 5a^2 - 12a + 4)} = a^2 + 3a - 2$

68) $\sqrt{(9-12a+28a^2-22a^3+20a^4-8a^5+a^6)}$
$= 3-2a+4a^2-a^3$

69) $\sqrt[3]{(8-36a+66a^2-63a^3+33a^4-9a^5+a^6)}$
$= 2-3a+a^2$

70) $\frac{1}{2\sqrt{2}}:(\sqrt{2}+3\sqrt{\tfrac{1}{2}}) = 0{,}1$

71) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{5}}{\sqrt{6}-\sqrt{5}} = 11+2\sqrt{30} = 21{,}95445\ldots$

72) $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}+\sqrt{6}} = 7-\sqrt{42} = 0{,}51906\ldots$

73) $\frac{6+\sqrt{65}}{\sqrt{13}+\sqrt{5}-\sqrt{6}} = \tfrac{1}{2}(\sqrt{13}+\sqrt{5}+\sqrt{6}) = 4{,}14555\ldots$

74) $\frac{2\sqrt{78}-14}{\sqrt{13}+\sqrt{5}-\sqrt{6}} = \sqrt{5}+\sqrt{6}-\sqrt{13} = 1{,}08\ldots$

75) $\frac{2\sqrt{30}+2}{\sqrt{13}+\sqrt{5}-\sqrt{6}} = \sqrt{13}-\sqrt{5}+\sqrt{6} = 3{,}81898\ldots$

76) $\frac{1}{a-\sqrt{ab}}+\frac{1}{a+\sqrt{ab}} = \frac{2}{a-b}$

77) $\frac{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}} = \frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}$

78) $\frac{(1-x)^{\frac{1}{2}}+(1+x)^{-\frac{1}{2}}}{1+(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}} = \sqrt{1-x}$

79) $\sqrt{(16+6\sqrt{7})} = 3+\sqrt{7} = 5{,}64575\ldots$

80) $\sqrt{(3+\sqrt{5})} = \frac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{2} = 2{,}28824\ldots$

81) $\sqrt{(18-2\sqrt{17})} = -1+\sqrt{17} = 3{,}1231\ldots$

82) $\frac{a+i\sqrt{b}}{a-i\sqrt{b}}+\frac{a-i\sqrt{b}}{a+i\sqrt{b}} = 2\cdot\frac{a^2-b}{a^2+b}$

83) $\sqrt{(5-i\sqrt{56})} = \sqrt{7}-i\sqrt{2}$

84) $\sqrt{(22+10i\sqrt{3})} = 5+i\sqrt{3}$

85) $\sqrt{(3+4i)}+\sqrt{(3-4i)} = 4$

86) $\sqrt{(101+44i\sqrt{5})}+\sqrt{(101-44i\sqrt{5})} = 22$

87) $\left(\frac{a^{ni}+a^{-ni}}{2}\right)^2+\left(\frac{a^{ni}-a^{-ni}}{2i}\right)^2=1$

88) $\frac{[(a+b)^2-c^2][b+c-a]}{2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4}=\frac{1}{a-b+c}$

89) $\frac{a^2-2ab-3b^2-ac+3bc}{a^2+2bc-b^2-c^2}=\frac{a-3b}{a+c-b}$

90) Bezeichnet n jede ganze absolute Zahl, so ist
$n_0+n_1+n_2+n_3+\ldots\ldots+n_{n-1}+n_n=2^n$

91) Ist von den drei Verbindungen, Summe, Differenz, Product, bei jeden zwei ganzen Zahlen, immer wenigstens Eine durch 3 theilbar?

Ja!

92) Behält jede ganze Zahl zur fünften Potenz erhoben, immer ihre letzte Ziffer bei?

Ja!

93) $\sqrt[3]{\frac{1{,}003^{300}-1{,}004^{200}}{3}}=0{,}4274229\ldots$

94) $\sqrt[5]{(9{,}924-3\cdot\sqrt{5{,}03})}=1{,}261575\ldots$

95) $\sqrt[17]{\frac{47+5\sqrt[3]{281}}{\sqrt[5]{16}}}=1{,}252276\ldots$

96) Welches ist die Summe der ersten n ungeraden Zahlen?

R. n^2

97) Welches ist die Summe der ersten n durch a theilbaren Zahlen?

R. $a\cdot(n+1)_2$

98) Es wird a zu den ganzen Potenzen, allen Exponenten von 1 bis n entsprechend, erhoben. Welches ist der allgemeine Ausdruck für die Summe derselben?

R. $\frac{a}{a-1}\cdot(a^n-1)$

99) Was entsteht aus dem Resultat der vorigen Aufgabe für $a=1; 2; 3$?

R. n; $2(2^n-1)$; $\frac{3}{2}(3^n-1)$

100) Wenn dem ächten Bruch $\frac{a}{b}$ nach der Reihefolge die Exponenten 1, 2, 3, ... *in inf.* gegeben werden; welches ist dann die Summe aller dieser unendlich vielen ächten Brüche?

R. $\frac{a}{b-a}$

101) Welches in dem Fall wenn blos die geraden Exponenten 2, 4, 6, . . . *in inf.* gewählt werden?

R. $\frac{a^2}{b^2-a^2}$

102) Welches in dem Fall, wenn man nur die ungeraden Exponenten 1, 3, 5 . . *in inf.* nimmt?

R. $\frac{ab}{b^2-a^2}$

103) Die Menge Kugeln in einem Kugelhaufen zu bestimmen, welcher eine vollständige dreiseitige Pyramide bildet, deren Grundebene die Form eines gleichseitigen Dreiecks hat und a Kugeln in jeder Seite desselben liegen.

R. $(a+2)_3$

104) Welches ist aber der Ausdruck für die Menge Kugeln, wenn die Pyramide unvollständig ist, und b Kugeln in jeder Seite der oberen Schicht liegen?

R. $(a+2)_3-(b+1)_3$

105) Welches dann wenn die Pyramide vollständig aber vierseitig ist und in jeder Seite der Grundebene a Kugeln liegen?

R. $(a+1)_2 \cdot \frac{2a+1}{3}$

106) Welcher Ausdruck giebt aber die Anzahl aller Ku-

geln wenn die vierseitige Pyramide unvollständig ist und b Kugeln in jeder Seite der oberen Schicht liegen?

R. $(a+1)_2 \cdot \frac{2a+1}{3} - b_2 \cdot \frac{2b-1}{3}$

107) Der Kugelhaufen habe die Form eines Daches mit zwei Walmen (ein symmetrisch abgekürztes dreiseitiges Prisma). Er enthalte n Schichten und die Anzahl Kugeln in der Forstlinie sei $= a$. Welches ist der Ausdruck für die Menge Kugeln in diesem Haufen?

R. $2(n+1)_3 + (n+1)_2 \cdot a$

108) Dieselbe Aufgabe für einen solchen, aber unvollständigen Haufen von n horizontalen Schichten, von welchen die oberste aus b Reihen, jede von a Kugeln, besteht.

R. Die Anzahl aller Kugeln ist

$$= nab + n_2\left(a + b + \frac{2n-1}{3}\right)$$

109) Welches ist die $n$te der $m$eckigen Zahlen?

R. $m \cdot n_2 - n(n-2)$.

110) Welches die Summe dieser n Zahlen?

R. $m \cdot (n+1)_3 - (n+1)_2 \cdot \frac{2n-5}{3}$

111) Ist die Nothwendigkeit, daß der Subtrahend des Ausdrucks in 110) eine ganze Zahl sein muß, arithmetisch zu begründen?

R. Ja! und zwar durch die drei Zahlformen $3p$; $3p+1$; $3p+2$ für alle ganze Zahlen.

112) Welches ist der Ausdruck für die Summe der Cubi der ersten n natürlich aufeinander folgenden ganzen Zahlen?

R. $[(n+1)_2]^2$

113) Welches der für die Summe der Cubi der ersten n ungeraden Zahlen?

R. $n^2 \cdot (2n^2 - 1)$

114) Welches der für die Summe der Cubi der ersten n geraden Zahlen?

R. $8 \cdot [(n+1)_2]^2$

115) Die Summe der ersten n Quadrate folgender Produkte $1 \cdot 2$; $2 \cdot 3$; $3 \cdot 4$; $4 \cdot 5$; ... bis $n \cdot (n+1)$ zu bestimmen.

R. $\frac{n}{15}(2 + 15n + 25n^2 + 15n^3 + 3n^4)$

Anmerkung. Durch die Theorie der Gleichungen des 4ten und 3ten Grades läßt sich dieser Ausdruck in Factoren zerlegen. Es entsteht dann für denselben folgender: $\frac{2}{5}(n+2)_3 \cdot (3n^2+6n+1)$ und daß derselbe für jede ganze positive Zahl, welche an die Stelle von n gesetzt wird, allemal auch eine ganze Zahl liefert, begründet sich wie 111).

116) Ein Kapital von 2000 Thlr. wird zu 6 Procent unter der Bedingung ausgeliehen, daß dasselbe am Schluß des 10ten Jahres nebst sämmtlichen einfachen Zinsen in einer Summe zurück gezahlt werden soll. Welches ist diese Summe?

R. 3200 Thlr.

117) Ein Kapital von 2000 Thlr. wird zu 5 Procent unter der Bedingung ausgeliehen, daß dasselbe am Schluß des 10ten Jahres nebst sämmtlichen Zinsen und Zinseszinsen in einer Summe zurückgezahlt werden soll. Welches ist diese Summe?

R. 3257 Thlr. 23 Sgr. $8\frac{1}{4}$ Pf.

118) Ein Kapital a wird zu p Procent einfachen Zinsen ausgeliehen, am Schluß jedes Jahres wird aber, statt die Zinsen in Empfang zu nehmen, noch die Summe b unter derselben Bedingung zugelegt. Wenn nun am Schluß

des $n$ten Jahres, ehe die neue Zulage b erfolgt, der Rückzahlungstermin festgesetzt ist, welche Summe ist an Kapital und Zinsen zu entrichten?

R. $a + (n-1)b + \frac{p}{100}(na + n_2 b)$

119) Ein Kapital von 100000 Thlr. ist zu 5 Procent ausgeliehen und es werden am Schluß jedes Jahres 6000 Thlr. an Zinsen und Abschlagszahlung aufs Kapital entrichtet. Nach Verlauf welcher Anzahl Jahre ist das Kapital amortisirt?

R. Nach Verlauf des 36sten Jahres, wenn am Schluß desselben statt 6000 Thlr. die Summe von 10163 Thlr. 20 Sgr. gezahlt wird.

120) Wenn mit Anfang jedes Jahres allemal die Summe a zu 5 Proc. Zinseszinsen untergebracht werden kann; welche Summe erwächst dann hieraus in 20 Jahren?

R. $34{,}71925 \cdot a$

121) Ein Waldbestand ist zu 200000 Einheiten (Klafter, Haufen ...) und der jährliche Zuwachs zu $\frac{5}{4}$ Procent abgeschätzt. Welches wird der Bestand nach 40 Jahren sein, wenn jährlich 2000 solcher Einheiten entnommen werden?

R. 225844,6 dieser Einheiten.

122) Wenn 8 Personen sich täglich in veränderter Ordnung zum Mittagtisch setzen wollen, in welcher Zeit würden alle mögliche Ordnungen beendigt werden?

R. In 40320 Tagen, also in ohngefähr $110\frac{1}{2}$ Jahren.

123) Welche Zeit würde aber erforderlich sein wenn unter diesen 8 Personen 3 Brüder wären und die Bestimmung festgesetzt würde, daß dieselben, wenn auch auf andern Plätzen, doch immer in derselben Folge neben einander sitzen sollten?

R. 720 Tage.

124) Welche Zeitlang müßte unausgesetzt L'hombre gespielt werden, die Zeitdauer jedes Spiels zu 4 Minuten an-

genommen, ehe die Wahrscheinlichkeit eintritt, daß dieselben 9 Karten zum zweiten Mal beim Geben zusammenfallen?

R. Nahe 2080 Jahre.

125) Die wievielste wohlgeordnete Versetzung der Elemente a, b, c, d, e ist die c, b, a, e, d?

R. Die 56ste.

126) Wie viele Verbindungen zu 2, 3, 4 und 5 finden bei 20 verschiedenen Elementen statt?

R. 190; 1140; 4845; 15504

127) Wie viele zu 13 und 14?

R. 77520; 38760

Zweite Abtheilung.

Aufgaben welche auf algebraische Gleichungen mit einem Unbekannten führen.

III. Algebraische Gleichungen mit einem Unbekannten zu ordnen.

1) $\frac{2}{3+x} - \frac{1+x}{3+2x} = \frac{1}{4}$

R. $x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} = 0$

2) $\frac{a}{a+2b} - \frac{b}{2a+b} = \frac{1}{5}$

R. $a^2 - \frac{5b}{8}a - \frac{3}{2}b^2 = 0$, nach a

$b^2 + \frac{5a}{12}b - \frac{2}{3}a^2 = 0$, nach b

$\left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{5}{8}\cdot\frac{a}{b} - \frac{3}{2} = 0$, nach $\frac{a}{b}$

$\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \frac{5}{12}\cdot\frac{b}{a} - \frac{2}{3} = 0$, nach $\frac{b}{a}$ geordnet.

3) $\frac{2c}{a+b} = 2bc^2 - \frac{3}{a+c}$

R. $a^2 + \left(b + c - \frac{2c+3}{2bc^2}\right)a + \frac{2c^2(b^2c-1)-3b}{2bc^2} = 0$

wenn nach a,

$$b^2 + \left(a - \frac{3}{2(a+c)c^2}\right)b - \frac{2c(a+c)+3a}{2(a+c)c^2} = 0$$

wenn nach b,

$$c^3 + \left(a - \frac{1}{(a+b)b}\right)c^2 - \frac{a}{(a+b)b}c - \frac{3}{2b} = 0$$

wenn nach c geordnet wird.

4) $5 - \frac{2-x}{3+x} - \frac{1-x}{2+x} = x$

R. $x^3 - 2x^2 - 21x - 23 = 0$

5) $3 - 2\sqrt{1+x} = x$

R. $x^2 - 10x + 5 = 0$

6) $\sqrt{11+2x} + \sqrt{2+x} = 8$

R. $x^2 - 366x + 2513 = 0$

oder $\sqrt{2+x} = y$ gesetzt, und nach y geordnet,

$y^2 + 16y - 57 = 0$

oder auch $\sqrt{(11+2x)}$ durch y ausgedrückt und nach y geordnet,

$y^2 - 32y + 135 = 0$

7) $\frac{\sqrt{(21-x)}}{x-3} + \frac{\sqrt{(4+x)}}{3} = 3$

R. $x^6 - 166x^5 + 7849x^4 - 78528x^3$
$+ 298080x^2 - 453060x + 226800 = 0$

oder $\sqrt{(21-x)} = y$ gesetzt, und nach y geordnet,

$y^6 + 20y^4 + 54y^3 - 1683y^2 - 972y + 18144 = 0$

oder auch, $\sqrt{(4+x)}$ durch y ausgedrückt,

$y^6 - 18y^5 + 67y^4 + 252y^3 - 1076y^2 - 882y$
$+ 3744 = 0$

8) $\sqrt{(1+x)} + \sqrt{(6+x)} = \sqrt{(22+x)}$

R. $x^2 + \frac{58}{3}x - 67 = 0$

oder, nach y geordnet, wenn $\sqrt{(1+x)} = y$ gesetzt wird,

$$y^4 + \frac{52}{3}y^2 - \frac{256}{3} = 0$$

ferner $\sqrt{(6+x)} = z$ gesetzt, und nach z geordnet,

$$z^4 + \frac{22}{3}z^2 - 147 = 0$$

oder auch, $\sqrt{(22+x)}$ durch w ausgedrückt und nach w geordnet,

$$w^4 - \frac{74}{3}w^2 - \frac{25}{3} = 0$$

9) $5 + \sqrt[3]{(1+x)} = x$

R. $x^3 - 15x^2 + 74x - 126 = 0$; so wie auch, $\sqrt[3]{(1+x)}$ unter y verstanden,

$$y^3 - y - 6 = 0$$

10) $\sqrt[3]{(7x+29)} = \sqrt{(3x+1)}$

R. $x^3 - \frac{22}{27}x^2 - \frac{397}{27}x - \frac{280}{9} = 0$

oder auch, eine der beiden Wurzeln unter y verstanden,

$$y^3 - \frac{7}{3}y^2 - \frac{80}{3} = 0$$

11) $6 + \sqrt[3]{(x^3+98)} = \sqrt{(40x+1)}$

R. $x^6 + 1440x^4 - 63336x^3 + 168000x^2 - 5880x + 98343 = 0$

auch, $\sqrt{(40x+1)} = y$ gesetzt,

$$y^6 - 3y^4 - 64000y^3 + 1152003y^2 - 6912000y + 20095999 = 0$$

12) $\sqrt[3]{(7x+50)} - \sqrt[3]{(5x+17)} = 1$

R. $x^3 - \frac{561}{8}x^2 - \frac{3819}{8}x + \frac{4909}{4} = 0$, so wie auch

$y^3 - \frac{15}{2}y^2 - \frac{15}{2}y + 63 = 0$, wenn $\sqrt[3]{(5x+17)}$ unter y, und

$$z^3 - \frac{21}{2}z^2 + \frac{21}{2}z + 62 = 0, \text{ wenn } \sqrt[3]{(7x+50)}$$

unter z verstanden wird.

IV. Aufgaben welche auf algebraische Gleichungen vom ersten Grad führen.

1) Welche Zahl giebt dasselbe Resultat, man mag sie zu a addiren oder von a subtrahiren?

R. Die Zahl 0 (Null).

2) Den Ausdruck zu bestimmen, welcher zu a addirt eben so viel liefert, als wenn a von ihm subtrahirt wird.

R. Es existirt kein endlicher Ausdruck.

3) Welcher Ausdruck liefert zu a addirt dasselbe Resultat, als wenn er mit a multiplicirt wird?

R. $\frac{a}{a-1}$

4) Einen Ausdruck zu finden, der zu a addirt eben so viel giebt, als wenn man ihn durch a dividirt.

R. $\frac{a^2}{1-a}$

5) Ein Ausdruck von a subtrahirt erzeugt dasselbe, was sich ergiebt wenn er mit a multiplicirt wird. Welches ist dieser Ausdruck?

R. $\frac{a}{1+a}$

6) Welcher Ausdruck liefert dasselbe, ob a von ihm subtrahirt oder mit ihm multiplicirt wird?

R. $\frac{a}{1-a}$

7) Welches Zahlbild giebt von a subtrahirt eben dasselbe als wenn es durch a dividirt wird?

R. $\frac{a^2}{1+a}$

8) Welches aber dann dasselbe wenn a von ihm subtrahirt oder wenn es durch a dividirt wird?

R. $\frac{a^2}{a-1}$

9) Welcher Ausdruck giebt mit a multiplicirt dasselbe als wenn er mit a dividirt wird?

R. Im Allgemeinen der 0; in dem besondern Fall, wenn $a=1$ ist, genügt jeder.

10) Welches Zahlbild hat die Eigenschaft daß die Summe seines $n$ten und $m$ten Theils den Ausdruck a giebt?

R. $\frac{nma}{n+m}$

11) Durch welchen Ausdruck muß sowohl a als b dividirt werden, damit die Summe beider Quotienten gleich c wird?

R. $\frac{a+b}{c}$

12) Was muß zu a addirt und von b subtrahirt werden, damit die Summe durch die Differenz dividirt, c hervorbringt?

R. $\frac{bc-a}{1+c}$

13) Welcher Ausdruck giebt zu a addirt und mit a multiplicirt, als Summe beider Verbindungen das Resultat b?

R. $\frac{b-a}{1+a}$

14) Welcher Ausdruck giebt zu a addirt und mit a multiplicirt, als Differenz beider Verbindungen den Ausdruck b?

R. $\frac{a+b}{a-1}$ wenn das Produkt als Minuend,

$\frac{a-b}{a-1}$ wenn dasselbe als Subtrahend genommen wird.

15) Es entsteht c als Differenz, wenn der $b$te Theil eines Ausdrucks vom $a$fachen desselben subtrahirt wird. Welches ist dieses Zahlbild?

R. $\frac{bc}{ab-1}$

16) Welcher Ausdruck liefert, mit den Zahlbildern a, b, c multiplicirt, wenn von der Summe der beiden ersteren Produkte das Doppelte des letzteren subtrahirt wird, d als Differenz?

R. $\frac{d}{a+b-2c}$

17) Eine Zahl wird mit 5 multiplicirt, zum Produkt 7 addirt, die Summe durch 3 dividirt und 13 vom Quotienten subtrahirt; der Rest ist 6. Welches ist diese Zahl?

R. 10

18) Das 5fache einer Zahl wird von 48 subtrahirt, der Rest mit 6 multiplicirt, zum Produkt 13 addirt, und die (absolute) Quadratwurzel aus der Summe mit $\frac{11}{14}$ dividirt; es entsteht der Quotient 7. Welches ist die Zahl?

R. $\frac{361}{40}$

19) Eine Zahl wird zu 9 addirt, die Summe mit 5 multiplicirt, vom Produkt 3 subtrahirt und der Rest dann durch 7 dividirt. Es entsteht die ursprüngliche Zahl selbst wieder; welche ist es?

R. 21

20) Wenn $\frac{3}{5}$ der jährlichen Einnahme fürs gesammte Haushalten, $\frac{1}{9}$ derselben zur Unterstützung an Arme verwendet wird und doch noch 260 Thlr. jährlich erspart werden, wie hoch ist dann die Einnahme?

R. 900 Thlr.

21) Ein Wechsel über 1000 Thlr. ist nach 6 Monaten erst zahlbar, der Besitzer desselben wünscht gleich Geld und ist mit dem Anerbieten von 8 Procent Abzug fürs Jahr zufrieden. Wie viel erhält er?

R. $961\frac{7}{13}$ Thlr.

22) Es sollen 2000 Thlr. nach einem entfernten Ort gesendet, aber das Porto mit zehn Procent von dieser Summe in Abzug gebracht und bezahlt werden. Wie viel bleibt abzusenden?

R. $1818\frac{2}{11}$ Thlr.

23) Zu welchen einfachen jährlichen Zinsen erwachsen 1420 Thlr. aus 1000 Thlr. in 7 Jahren?

R. Zu 6 Procent.

24) Zu wie viel Procent aber, wenn Zinseszinsen gerechnet werden?

R. Zu 5,137

25) In welchem Zeitraum erwächst jedes Kapital bei 4 Procent einfachem jährlichen Zuwachs zur dreifachen Größe?

R. In 50 Jahren.

26) Welche Zeit ist aber bei Zinseszinsen nur erforderlich?

R. 28 Jahre und 4 Tage.

27) Eine Capitalschuld von 20000 Thlr. zu 5 Procent soll in 8 Jahren dadurch amortisirt werden, daß am Ende jedes Jahres eine gleiche Summe abgetragen wird. Wie viel?

R. 3094 Thlr. 13 Sgr. $2\frac{1}{2}$ Pf.

28) Wie viel sind a Thlr., deren Eingang erst nach n Jahren erfolgt, jetzt dem werth, welcher sein Geld zu p Procent einfachen Zinsen benutzen kann?

R. $\frac{100 \cdot a}{100 + np}$ Thlr.

29) Wie viel in dem Fall wenn Zinseszinsen angenommen werden?

R. $\left(\frac{100}{100 + p}\right)^n \cdot a$

30) Die Zahl 198 in 9 Theile der Bedingung entsprechend zu theilen, daß jeder folgende Theil um 3 größer sei als der vorhergehende. Welches muß der erste Theil sein?

R. 10

31) Die Zahl 49205 in 9 Theile der Bedingung entsprechend zu theilen, daß jeder folgende Theil 3mal so groß als der vorhergehende wird. Welches ist der erste Theil?

R. 5

32) Es geben 17 Zahlen, deren erste 4, jede folgende aber um gleich viel größer als die vorhergehende ist, 374 zur Summe. Welches ist die Differenz jeder zwei aufeinander folgenden?

R. $\frac{9}{4}$

33) Das erste Glied einer arithmetischen Progression sei 3, das letzte 35, die Summe aller Glieder 247. Wie viel Glieder sind es?

R. 13

34) Welches ist die bleibende Differenz jeder zwei aufeinander folgenden Glieder in der vorigen Aufgabe?

R. $\frac{8}{3}$

35) In einer arithmetischen Progression, deren erstes Glied 5 ist, beträgt die Summe des 17ten und 23sten Gliedes 416. Welches ist die Differenz?

R. $\frac{203}{19}$

36) Es seien 5 und 1215 Glieder einer geometrischen Progression und die Summe beider und aller zwischen ihnen liegenden Glieder sei 1820. Welches ist der bleibende Factor?

R. 3

37) Der constante Factor einer geometrischen Progression von 6 Gliedern sei $= 3$, die Summe dieser sechs Glieder $= \frac{364}{9}$. Welches ist das erste Glied?

R. $\frac{1}{9}$

38) Ein Kugelhaufen in Form eines Daches mit Walmen enthält in 20 horizontalen Schichten 5180 Kugeln. Wie viele liegen in der Forstlinie?

R. 12

39) Wenn aber der Haufen unvollständig ist, aus 10 Schichten besteht, 2130 Kugeln enthält und in der obersten Schicht in der einen Richtung 6 Kugeln liegen; wie viele liegen dann in der andern?

R. 15

40) Es sind die Zahlen 7 und 4 gegeben. Wie viel muß von der kleineren genommen und zur größern zugelegt werden, damit das Verhältniß wie 5 zu 1 wird?

R. $\frac{13}{6}$

41) Wie viel müßte aber zu jeder addirt werden, wenn das Verhältniß wie 9 zu 5 entstehen sollte?

R. $-\frac{1}{4}$

42) Welche Zahl ist es, die, wenn man 3 von ihr subtrahirt, den Rest mit 5 multiplicirt, zum Produkt 44 addirt, aus der Summe die Cubikwurzel nimmt, hiezu 16 addirt, die siebenfache Summe von 200 subtrahirt und die Null an der letzten Stelle des Restes wegläßt, das Resultat 6 liefert?

R. 7

43) Welcher Ausdruck liefert sowohl zu a als auch zu $2a$ addirt, beide Summen quadrirt und ersteres Quadrat von letzterem subtrahirt, das Quadrat des $n$fachen von a?

R. $\frac{n^2 - 3}{2} a$

44) Welche Zahl hat die Eigenschaft, daß wenn man 5 zu ihr addirt und auch 7 von ihr subtrahirt und den 4ten Theil letzterer Differenz vom 3ten Theil ersterer Summe abzieht, der Rest 11 entsteht?

R. 91

45) Man hat zwei Zahlen, deren Differenz 9 ist; nimmt man von der kleineren die Hälfte und addirt sie zur größeren, dann von der entstandenen Summe die Hälfte und addirt sie zur entstandenen Differenz, so wird das Verhältniß beider Resultate $= \frac{3}{4}$. Welches war die kleinere beider Zahlen?

R. 6

46) Jemand nimmt, nachdem er sein monatliches Gehalt in die leere Casse gelegt, davon die Hälfte und 10 Thlr. heraus; den folgenden Monat, nach Eingang seines Gehaltes aber nur 5 Thlr. weniger als den dritten Theil des in der Casse vorhandenen Geldes; den nächsten Monat nach abermaligem Empfang seines Gehaltes 30 Thlr. mehr als den vierten Theil des Betrags der gesammelten Casse, und behält so in derselben genau so viel als seine monatliche Einnahme beträgt. Wie hoch ist dieselbe?

R. $62\frac{1}{2}$ Thaler.

47) In zwei nicht ganz mit Wasser angefüllten Gefäßen befindet sich im ersten doppelt so viel als im zweiten; gießt man aber den dritten Theil seines Inhaltes und noch 5 Quart aus dem ersten ins zweite, dann den vierten Theil seines jetzigen Inhaltes weniger 3 Quart aus dem zweiten

ins erste, so enthalten beide gleich viel. Wie viel enthielt anfänglich das zweite?

R. 27 Quart.

48) In zwei nicht vollen Gefäßen befindet sich Wasser, im ersten 10 Quart mehr als im zweiten. Es wird aus dem ersten die Hälfte seines Inhaltes ins zweite, dann aus dem zweiten die Hälfte seines jetzigen Inhaltes ins erste, dann wieder aus dem ersten die Hälfte seines entstandenen Inhaltes ins zweite und zuletzt noch einmal aus dem zweiten die Hälfte dessen was es jetzt enthält ins erste gegossen. Zuletzt enthält das erste Gefäß 20 Quart mehr als das zweite; wie viel enthielt letzteres anfänglich?

R. 26 Quart.

49) Welche Zahl ist es, die, wenn man von ihr den 3ten Theil derselben weniger 5, dann vom Rest wieder den 3ten Theil desselben weniger 5 wegnimmt, und diese Operation noch zweimal wiederholt, den Rest 31 läßt?

R. 96

50) Von der Zahl 1000 wird die Summe ihres fünften Theils und noch einer Zahl, vom Rest wieder die Summe des fünften Theils desselben und derselben Zahl, und von dem jetzt gebliebenen Ueberschuß abermals die Summe seines fünften Theils und derselben schon zweimal gebrauchten Zahl subtrahirt. Es bleibt 85 als Rest. Welches ist die nicht gegebene Zahl?

R. 175

51) Von einer Zahl wird Eins weniger als ihre Hälfte, vom Rest wieder Eins weniger als seine Hälfte und von diesem Rest abermals Eins weniger als seine Hälfte subtrahirt. Es bleibt der dritte Theil der ursprünglichen Zahl übrig. Welches war dieselbe?

R. $\frac{42}{5}$

52) Drei Personen erhalten eine Summe zur Vertheilung unter sich nach den Verhältnißzahlen a, b, c. Es erhält die erste den Antheil d. Welches ist der Ausdruck für die Summe?

R. $\frac{a+b+c}{a} \cdot d$

53) Bei einer Subtraction ist der Minuend das siebenfache des Subtrahends und der Rest um 15 größer als dieser Subtrahend. Welches ist derselbe?

R. 3

54) Die Zahl 41 so in 2 Summanden zu theilen, daß wenn der größere durch 7, der kleinere durch 5 dividirt wird, letzterer Quotient um Eins größer wird als ersterer. Welches ist der größere?

R. 21

55) Um wie viel muß a vermehrt und zugleich b vermindert werden, damit die Summe durch die Differenz dividirt, den Quotienten $\frac{b}{a}$ liefert?

R. Um $b - a$

56) Welcher Ausdruck ist eben so viel weniger als a, wie sein $n$faches mehr als a ist?

R. $\frac{2a}{1+n}$

57) Ein Bruch, dessen Nenner um a größer ist als sein Zähler, hat die Eigenschaft daß das $b$fache desselben seiner $n$ten Potenz gleich ist. Welches ist sein Zähler?

R. $\frac{ap}{1-p}$ wenn $\sqrt[n-1]{b}$ unter p verstanden wird.

58) Jemand verkauft jedes Quart seines Weines zu a Sgr. und gewinnt dabei p Procent. Wie viel hat er für den Eimer (60 Quart) bezahlt?

R. $\frac{200a}{100+p}$ Thaler.

59) Der Zähler eines Bruchs ist um a kleiner als sein Nenner, vertauscht man aber Zähler mit Nenner und Nenner mit Zähler, so wird die $n$te Potenz des entstandenen Bruchs das $b$fache des ursprünglichen. Welches ist der Zähler des letzteren?

R. $\frac{a}{\sqrt[n+1]{b}-1}$

60) Welche Zahl giebt, durch 7 dividirt, wenn von diesem Bruch derjenige subtrahirt wird, welcher aus dem vorigen dadurch entsteht daß sowohl der Zähler als der Nenner um Eins vermindert wird, den 36sten Theil des Minuends zum Rest?

R. 6

61) Ein Arbeiter erhält täglich ohne Kost 20 Sgr., mit Kost 14 Sgr. Arbeitslohn. Wenn er hiernach für 30 Tage 15 Thlr. 12 Sgr. empfängt, wie viel Tage hat er dann keine Kost gehabt?

R. 7 Tage.

62) Zwei Ausdrücke sind um a, ihre Quadrate um b verschieden. Welches ist der Subtrahend?

R. $\frac{b-a^2}{2a}$

63) Welcher Ausdruck liefert, zu a addirt, die Summe cubirt, vom Cubus b subtrahirt und dann die Differenz zum Quadrat erhoben, c zum Resultat?

R. $-a+\sqrt[3]{(b+\sqrt{c})}$

64) Zwei Personen verkaufen dieselben Gegenstände, die erste 200, die zweite 180 Stück, aber die zweite jedes Stück um 15 Sgr. theurer als die erste. Beide lösen gleich viel. Wie viel erhielt die erste für jedes Stück?

R. $4\frac{1}{2}$ Thaler.

65) Ein Ausdruck hat die Eigenschaft, daß er sich dadurch in eine zu bestimmende Anzahl gleicher Theile eintheilen läßt, wenn

der erste Theil $= a + \frac{1}{n}$ des Restes,

der zweite $= 2a + \frac{1}{n}$ des nun noch Uebriggebliebenen,

der dritte $= 3a + \frac{1}{n}$ des neuen Restes

u. s. w.

genommen wird. Wie viele solche gleiche Theile entstehen?

R. Einer, so wie auch $n - 1$; im ersten Fall ist der Ausdruck a, im zweiten $(n-1)^2 a$

66) Welche Zahl ist es, welche, wenn man von ihr den 3ten Theil derselben und 32, vom Rest wieder den 3ten Theil desselben und 32 subtrahirt und dasselbe nun noch zweimal ausführt, dann 16 übrig läßt?

R. 471

67) Den Ausdruck zu ermitteln, welcher, wenn von ihm sein $n$ter Theil und a, dann vom Rest der $n$te Theil desselben und a u. s. w. subtrahirt wird, nach $p$maliger Wiederholung dieser Arbeit zuletzt b übrig läßt?

R. $\left(\frac{n^p - (n-1)^p}{n^{p-1}} a + b\right) \cdot \left(\frac{n}{n-1}\right)^p$

68) Welches muß aber dieser Ausdruck sein, wenn, nachdem die Subtraction $p$mal vollzogen ist, kein Rest bleiben soll?

R. $\left[\left(\frac{n}{n-1}\right)^p - 1\right] n a$

69) Ein Vater ist jetzt dreimal so alt, nach 20 Jahren doppelt so alt wie sein Sohn. Wie alt ist jetzt der Sohn?

R. 20 Jahre.

70) Ein Vater ist jetzt 50, seine 3 Kinder 26, 22 und 18 Jahre alt. Wenn wird das Alter des Vaters eben so groß sein wie das seiner 3 Kinder zusammen genommen?

R. Es war vor 8 Jahren der Fall.

71) Mein Alter in Jahren ausgedrückt ist heute dreimal so groß als das Alter meiner um 40 Jahre jüngeren Tochter. Wie alt bin ich gegenwärtig?

R. 60 Jahre.

72) Für ein Grundstück bietet Jemand 20000 Thlr., aber nur den 4ten Theil baar, den Rest erst nach 15 Monaten zahlbar; ein anderer bietet nur 18000 Thlr., aber sogleich baar. Der Verkäufer schließt mit dem zweiten ab, weil dessen Anerbieten ihm 500 Thlr. vortheilhafter ist. Zu welchen jährlichen einfachen Zinsen benutzt derselbe hiernach sein Geld?

R. Zu 16 Procent.

73) Zu welchem Zinsfuß aber in dem Fall wenn ihm das Anerbieten des Ersteren 500 Thlr. besser erscheint?

R. Zu $8\frac{8}{9}$ Procent.

74) Zu welchem Zinsfuß aber dann, wenn ihm beide Gebote gleich gut vorkommen?

R. Zu $12\frac{4}{13}$ Procent.

75) Es ist Jemand verpflichtet nach 6 Monaten 3120, 2 Monate später 3160 und noch 4 Monate nachher 5400 Thlr. zu zahlen. Er wünscht die ganze Summe in einem Termine zu entrichten und der Empfänger nimmt diesen Vorschlag unter der Bedingung an, daß die Berechnung des Termins darauf, daß er sein Geld zu jährlich 8 Procent benutzen könne, begründet werde. Wann muß hiernach die Zahlung erfolgen?

R. Nach $9\frac{3}{11}$ Monaten.

76) Jemand vermehrt sein Vermögen jährlich um p Procent, nimmt aber am Schluß jedes Jahres die Summe a zu Bestreitung der Ausgaben im folgenden Jahr in die

Haushaltungs-Casse. Am Schluß des *n*ten Jahres nach erfolgter Wegnahme der Summe a ist er $m$mal so reich als er war. Welches Vermögen hatte er anfänglich?

R. $\frac{e^n - 1}{(e-1)(e^n - m)} \cdot a$ wenn e den Ausdruck $1 + \frac{p}{100}$ bezeichnet.

77) Ein Behälter füllt sich durch den Zufluß aus zwei Röhren mit Wasser, wenn aus der einen 3, aus der andern 4 Stunden lang die Speisung erfolgt und letztere in derselben Zeit doppelt so viel Wasser liefert als erstere. In welcher Zeit füllen ihn beide gleichzeitig?

R. In $3\frac{2}{3}$ Stunden.

78) In welcher Zeit füllen aber drei Röhren gleichzeitig einen Behälter, wenn die Mengen welche sie zuführen sich wie 3, 4, 5 verhalten, und die successive Füllung erfolgt wenn die erste 2, die zweite 6 und die dritte 1 Stunde lang speist?

R. In 2 Stunden 55 Minuten.

79) Bei einer Sammlung kommt, wenn jeder Theilnehmer a giebt, b mehr, wenn jeder c giebt, d weniger zusammen als der Bedarf erfordert. Wie viel Theilnehmer waren es?

R. $\frac{b+d}{a-c}$. Der Bedarf ist demnach $\frac{ad+bc}{a-c}$ und jeder muß $\frac{ad+bc}{b+d}$ beitragen.

80) Eine Materie, von welcher die Maß-Einheit den Werth a, mit einer andern ähnlichen, von welcher jede solche Einheit nur den Werth b hat, in dem Verhältniß zu vermischen daß dieselbe Einheit der Mischung den mittleren Werth c erhält. Welches ist dieses Verhältniß?

R. $(c - b) : (a - c)$

81) Wie viel muß also von jeder Materie genommen werden um d Einheiten Mischung zu erhalten?

R. Von der ersteren die Menge $\frac{c-b}{a-b}d$; von der zweiten die $\frac{a-c}{a-b}d$

82) Wie viel müßte aber dann von der zweiten genommen werden, wenn e Einheiten der ersten Materie zur Mischung zu verwenden sind?

R. $\frac{a-c}{c-b}e$

83) In welchem Verhältniß ist reines Silber (16löthiges) mit 11löthigem zu verschmelzen, um 15löthiges zu erhalten?

R. Im Verhältniß 4 zu 1.

84) Wie viel 10löthiges Silber muß mit 3 Pfund 15löthigem verschmelzt werden, um 12löthiges zu erhalten?

R. $4\frac{1}{2}$ Pfund.

85) Wie viel Wasser ist unter 40 Quart Wein zu mischen, damit der Preis von 21 Groschen auf 20 Groschen reducirt werden kann?

R. 2 Quart.

86) Die Vorderräder eines Wagens haben a, die Hinterräder b Längen-Einheiten Umfang. Wie viel Umdrehungen jedes Hinterrades sind in dem Augenblick erfolgt, in welchem die Anzahl aller Umdrehungen jedes Vorderrades um c größer ist als die jedes Hinterrades?

R. $\frac{ac}{b-a}$; jedes Vorderrad hat in derselben Zeit $\frac{bc}{b-a}$ Umdrehungen gemacht und der zurückgelegte Weg ist $=\frac{abc}{b-a}$ Längen-Einheiten.

87) Wenn in Beziehung auf die vorige Aufgabe b und c ihre Bedeutung behalten und d den zurückgelegten ganzen Weg bezeichnet; wie viel Längen-Einheiten Umfang muß dann jedes Vorderrad haben?

R. $\frac{bd}{bc+d}$

88) Zwei Schützen üben sich, der erste hat schon 20mal geschossen ehe der zweite anfängt, und macht 10 Schüsse während der zweite nur 9 macht, verbraucht aber zu 5 Schüssen nur eben so viel Pulver als der zweite zu 3 Schüssen. Nach wie viel Schüssen des zweiten haben beide gleich viel Pulver verbraucht?

R. Nach 36 Schüssen.

89) Wo liegt der Drehpunkt bei den gewöhnlichen aufzuklappenden Spieltischen, wenn a die Seite des Quadrats bezeichnet, welches der Tisch, nachdem er aufgeklappt ist, bildet?

R. In den Entfernungen $\frac{3}{8}a$ von zwei anliegenden Seiten des Quadrats.

90) Bei einer gewöhnlichen arithmetischen Progression ist a das erste Glied und S die Summe der ersten n Glieder. Welches ist der Ausdruck für die Summe der ersten m Glieder dieser Progression?

R. $\frac{m^2}{n^2}S + \frac{m(n-m)}{n-1}a$

91) Ein Brunnengräber fordert für Ausgrabung eines Brunnen im Fall er 25 Fuß tief wird, ein Bauschquantum von 100 Thlr. Für jede andere Tiefe soll hienach und der Bestimmung entsprechend daß die erste einen Fuß tiefe Schicht zu 18 Sgr. gerechnet werde, die Berechnung der Kosten erfolgen. Das Wasser findet sich schon in 20 Fuß Tiefe; welches sind die Kosten?

R. 65 Thlr. 25 Sgr.

92) Wenn bei Ausgrabung eines Brunnen die Kosten für die erste einen Fuß tiefe Schicht zu 15 Sgr., für jede folgende eben so tiefe aber immer gleich viel mehr als für die vorhergehende berechnet werden, die gesammten Kosten für 24 Fuß Tiefe aber 81 Thlr. betrugen, so soll daraus die Kosten-Differenz jeder zwei aufeinander folgenden Schichten bestimmt werden.

R. Es folgt dieselbe $= \frac{1}{4}$ Thlr.

93) In einer gewöhnlichen arithmetischen Progression ist die Summe der ersten 16 Glieder $= 160$ und die der ersten 22 Glieder $= 352$. Welches ist das erste Glied?

R. -5 (folgt unmittelbar aus 90).

94) In einer gewöhnlichen arithmetischen Progression, deren Differenz d ist, liefert die Summe des $n$ten und $m$ten Gliedes die Zahl b. Welches ist das erste Glied dieser Progression?

R. $\frac{b-(n+m-2)d}{2}$

95) Der constante Quotient einer geometrischen Progression sei $= e$, der Unterschied wenn das $n$te Glied vom $m$ten subtrahirt wird $= b$. Welches ist das erste Glied?

R. $\frac{b\,e}{e^m - e^n}$

96) Das erste Glied einer höhern arithmetischen Progression der dritten Ordnung sei $= 3$, das erste Glied der zweiten Differenzen-Reihe 5, jedes Glied der dritten 6, die Summe der ersten 12 Glieder der höhern Progression selbst $= 4568$. Welches ist das erste Glied der ersten Differenzen-Reihe?

R. 7

97) Das erste Glied einer höhern arithmetischen Progression der vierten Ordnung und die ersten Glieder der aus ihr entspringenden Differenzen-Reihen bilden selbst eine stei-

gende gewöhnliche arithmetische Progression, deren Differenz 5 ist. Welches ist das erste Glied der höhern Progression, wenn die Summe der ersten 10 Glieder derselben 7067 beträgt?

R. -4

98) Das 9te Glied einer steigenden geometrischen Progression zum constanten Factor 3 ist um 3240 größer als das fünfte Glied derselben. Welches ist das erste Glied?

R. $\frac{1}{2}$

99) Das erste Glied einer fallenden ohne Ende fortlaufenden geometrischen Progression ist $=\frac{3}{2}$, die Summe aller Glieder 6. Welches ist der constante Factor?

R. $\frac{3}{4}$

100) Die Summe der ersten n Glieder einer gewöhnlichen arithmetischen Progression zur Differenz d ist eben so groß als die Summe derselben Anzahl Glieder einer geometrischen Progression, welche dasselbe erste Glied hat und deren constanter Factor e ist. Welches ist das gemeinschaftliche erste Glied?

R. $n_2 d : \left(\frac{e^n - 1}{e - 1} - n\right)$

101) Für wie viele der natürlich auf einander folgenden ganzen Zahlen von 1 an ist die Summe ihrer Quadrate das $m$fache der Summe dieser Zahlen selbst?

R. Für $\frac{3m-1}{2}$ Glieder, so daß also m eine ungerade ganze Zahl sein muß.

102) Vom Punkt A aus bewegt sich ein Körper in gerader Linie und durchläuft in jeder Zeit-Einheit die Längen-Einheit a mal; b Zeit-Einheiten nachher bewegt sich ein zweiter Körper von A ab in derselben Richtung und durchläuft in jeder Zeit-Einheit die Längen-Einheit c mal. Nach

wie viel Zeit-Einheiten, vom Augenblick an gerechnet in welchem der zweite Körper seine Bewegung beginnt, ist derselbe noch d Längen-Einheiten hinter dem ersten?

R. Nach $\frac{d - ab}{a - c}$ Zeit-Einheiten.

103) Nach wie viel Zeit-Einheiten ist der zweite dem ersten um d Längen-Einheiten vorgeeilt?

R. Nach $\frac{d + ab}{c - a}$ Einheiten.

104) Nach wie viel Zeit-Einheiten hat der zweite den ersten gerade eingeholt?

R. Nach $\frac{ab}{c - a}$ Einheiten.

105) In der in n gleiche Theile getheilten Peripherie eines Kreises gehen von der Anfangsstelle der Eintheilung zwei Punkte gleichzeitig aus und bewegen sich in dieser Peripherie; der eine durchläuft a, der andere nur b solcher Theile in der Zeit-Einheit. Wo decken sie sich zum $p$ten mal?

R. An der durch $\frac{pnb}{a - b}$ bestimmten Stelle.

106) Wo aber in dem Fall wenn der langsamere auch noch d Zeit-Einheiten später abgeht?

R. An der durch $\frac{pn - ad}{a - b} b$ bestimmten Stelle.

107) Zwei Personen A und B befinden sich in zwei Punkten, A in C, B in D, deren Entfernung 30 Längen-Einheiten ist und gehen gleichzeitig von ihren Standpunkten in der Richtung CD ab. Nach wie viel Schritten des A ist A nur noch 20 Längen-Einheiten hinter B, wenn A auf jede Längen-Einheit 4, B aber 5 Schritte gebraucht und gleichzeitig A 6, B aber 7 Schritte macht?

R. 600

108) Wie viel Schritte muß aber A bis zu dem Augenblick zurücklegen, in welchem er den B eingeholt hat?

R. 1800

109) Zwei Körper bewegen sich aus ihren Standpunkten A, B, deren Entfernung 2569 Fuß ist, gleichzeitig nach der Richtung AB; der von A ausgehende macht in der ersten Secunde 3 Fuß, in jeder folgenden doppelt so viel als in der vorhergehenden, der von B ausgehende durchläuft in der ersten Secunde 5 Fuß, in jeder folgenden aber immer um eben so viel mehr als in der vorhergehenden. Wie groß muß diese constante Zunahme sein, wenn er am Schluß der 10ten Secunde von dem ersteren eingeholt sein soll?

R. 10

110) Ein Hund ist vom Lager eines Hasen noch 15 Hundesprünge entfernt als der Hase entflieht und der Hund ihm nacheilt. Wie viel Sprünge muß der Hund machen bis zum Augenblick wo er den Hasen einholt, wenn der Hund mit 5 Sprüngen so weit kommt als der Hase mit 8, und gleichzeitig der Hund 3, der Hase 4 Sprünge macht?

R. 90

111) Zwei Körper bewegen sich aus ihren Standpunkten A, B, deren Entfernung a Fuß ist, gleichzeitig einander direct entgegen; der von A ausgehende macht in der ersten Secunde b Fuß, in jeder folgenden aber immer d Fuß mehr als in der vorhergehenden, der von B ausgehende durchläuft in jeder Secunde immer e Fuß. Wie weit sind beide am Schluß von h Secunden von einander entfernt?

R. $a - (b + e + \frac{h-1}{2} d) h$ Fuß.

112) Welchen Weg e müßte der von B ausgehende in jeder Secunde dann zurücklegen, wenn sich beide Körper am Schluß von h Secunden treffen sollten?

R. $e = \frac{a - bh - dh_2}{h}$

113) Welchen Weg d müßte aber der von A ausgehende in jeder folgenden Secunde mehr als in der vorhergehenden machen, damit beide Körper am Schluß der Zeit h zusammentreffen?

R. $d = \frac{a - (b + e) h}{h_2}$

114) Wie drückt sich x der Gleichung $a^x \cdot b^{cx+d} = e$ entsprechend durch a, b, c, d und e aus?

R. $x = \frac{log\, e - d\, log\, b}{log\, a + c\, log\, b}$

115) Das wievielste Glied einer geometrischen Progression, deren erstes Glied 5 und constanter Factor 16 ist, drückt die Zahl 163840 aus?

R. Es folgt $4\frac{3}{4}$ als Stellenzahl, d. h. es ist 163840 das 3te von 3 interpolirten Gliedern zwischen dem vierten und fünften ursprünglichen Gliede.

116) Das wievielste Glied derselben Progression ist 10000000?

R. Die Stellenzahl ergiebt sich $= 5{,}232892 \ldots$ und die Näherungswerthe sind $5\frac{1}{4}$; $5\frac{3}{13}$; $5\frac{7}{30}$; $5\frac{17}{73}$ u. s. w., also ist annähernd 10000000 das 17te von 72 interpolirten Gliedern zwischen dem 5ten und 6ten ursprünglichen Gliede.

117) Es bezeichne a das erste Glied, e den constanten Factor einer geometrischen Progression; wie viele Glieder derselben liefern die Summe S?

R. Es ist diese Anzahl $= \frac{log\,[a + (e-1) S] - log\, a}{log\, e}$

Entspringt hieraus keine vollständige ganze Zahl, sondern fällt das Resultat zwischen die beiden ganzen Zahlen n und $n + 1$, so drückt $S - \frac{a e^n - a}{e - 1}$ ein in der gegebenen Summe S noch mit enthaltenes interpolirtes Glied R aus, und ist

dieses das pte von $q-1$ interpolirten Gliedern zwischen dem $nten$ und $(n+1)$ten, so ist

$$\frac{p}{q}=\frac{\log R-\log a}{\log e}-(n-1)$$

118) In Beziehung auf die vorige Aufgabe sei $a=3$; $e=8$; $S=987$. Welches ist der Werth von n?

R. Es ist 987 die Summe der ersten drei ursprünglichen Glieder und des zweiten von 2 interpolirten Gliedern zwischen dem dritten und vierten ursprünglichen.

119) Die Exponenten zu den Dignanden a, b, c verhalten sich wie 1 zu p zu q, das Product der drei Potenzen selbst sei $=d$. Welches ist der Exponent zu a?

R. $\dfrac{\log d}{\log a+p\log b+q\log c}$

120) Drei Ausdrücke zu bestimmen, welche sich wie $1:p:q$ verhalten und die, zu den Potenzen a, b, c erhoben, das Product d liefern.

R. Der erste ist $N\left(\dfrac{\log d-b\log p-c\log q}{a+b+c}\right)$

V. Aufgaben welche auf algebraische Gleichungen vom zweiten Grad führen.

1) Welcher Ausdruck giebt in a dividirt dasselbe Resultat als wenn man ihn mit a multiplicirt?

R. ± 1

2) Welcher Ausdruck giebt in a dividirt eben dasselbe als wenn man ihn durch a dividirt?

R. $\pm a$

3) Welches Zahlbild hat die Eigenschaft, daß dasselbe

Resultat entsteht, man mag mit demselben in a dividiren oder a dazu addiren?

R. $\frac{1}{2}[-a \pm \sqrt{(a^2 + 4a)}]$

4) Es wird a durch einen Ausdruck dividirt und es entsteht dasselbe als wenn man diesen Ausdruck von a subtrahirt hätte. Welches ist dieser Ausdruck?

R. $\frac{1}{2}[a \pm \sqrt{(a^2 - 4a)}]$

5) Es existirt ein Ausdruck, welcher, wenn man a durch ihn dividirt oder a von ihm subtrahirt, dasselbe Resultat giebt. Welcher ist es?

R. $\frac{1}{2}[a \pm \sqrt{(a^2 + 4a)}]$

6) Welche Zahl hat die Eigenschaft daß einmal 3, das anderemal 6 zu ihr addirt, das Product beider Summen 70 wird?

R. Sowohl $+4$ als auch -13

7) Welche Zahl giebt mit 16 multiplicirt eben so viel als wenn 3 zu ihr addirt und dann das Quadrat dieser Summe gebildet wird?

R. 9 auch 1

8) Welche Zahl giebt zu ihrem Quadrat addirt die Summe 56?

R. 7 auch -8

9) Die Quadratwurzel aus einer zu bestimmenden Zahl soll, von der Zahl selbst subtrahirt, 42 übrig lassen. Welches ist dieselbe?

R. 49, wenn die Wurzel positiv; 36, wenn sie negativ genommen wird.

10) Zwei um a verschiedene Zahlen geben b zum Produkt. Welches ist die kleinere?

R. $\frac{1}{2}[-a \pm \sqrt{(a^2 + 4b)}]$

11) Ein Ausdruck, einmal zu a addirt, dann auch mit a multiplicirt, giebt für die Summe der Quadrate beider Resultate das Quadrat des $b$fachen desselben Ausdrucks. Welches ist derselbe?

R. $\frac{1 \pm \sqrt{(b^2 - a^2)}}{b^2 - a^2 - 1} a$

12) Der Zähler eines Bruchs ist um a kleiner als sein Nenner und giebt zu dem umgekehrten Bruch addirt, die Summe a. Welches ist der Zähler dieses Bruchs?

R. $\frac{2 - a \pm \sqrt{(a^2 - 4)}}{2(a - 2)} a$

Bemerkung. Für $a = 2$ existirt ein solcher Bruch nicht.

13) Welches Zahlbild hat die Eigenschaft, daß es zu a addirt und a von ihm subtrahirt, das Quadrat der entstehenden Summe um a größer macht als das $a$fache des Quadrats der Differenz?

R. $\frac{a^2 + a \pm \sqrt{(4a^3 - a^2 + a)}}{a - 1}$

Bemerkung. Für $a = 1$ entsteht keine quadratische Gleichung, sondern nur eine vom ersten Grad und liefert $\frac{1}{4}$.

14) Die Quadrat-Wurzel aus a und dem Quadrat des $a$fachen eines gesuchten Ausdrucks ist gleich der Summe von a und dem Quadrat dieses Ausdrucks. Welches ist derselbe?

R. $\pm \sqrt{\left[\frac{a^2 - 2a \pm \sqrt{(a^4 - 4a^3 + 4a)}}{2}\right]}$

15) Den Ausdruck zu ermitteln, der in a dividirt, dann den Quotienten cubirt, vom Cubus a subtrahirt und aus der Differenz die Cubic-Wurzel genommen, den gesuchten Ausdruck selbst wieder giebt.

R. $\sqrt[3]{\left[\frac{-1 \pm \sqrt{(1 + 4a)}}{2} \cdot a\right]}$

16) Die Summe zweier Zahlen sei a; es wird a durch jede derselben dividirt und die Summe beider Quotienten wird wieder a. Welches sind die beiden Theile von a?

R. $\frac{1}{2}[a \pm \sqrt{(a^2 - 4a)}]$

17) Welches sind sie aber in dem Fall wenn die Differenz der Quotienten $= a$ werden soll?

R. $\frac{1}{2}[a + 2 \pm \sqrt{(a^2 + 4)}]$ und

$\frac{1}{2}[a - 2 \mp \sqrt{(a^2 + 4)}]$ ersterer der Divisor des Minuends, letzterer der des Subtrahends.

18) Welches dann, wenn das Product dieser beiden Quotienten wieder a liefern soll?

R. Dieselben wie in 16). Es geben also zwei Brüche, die denselben Zähler haben und deren Nenner addirt diesen Zähler als Summe liefern, allemal dasselbe Resultat, man mag sie addiren oder multipliciren.

19) Es wird a durch einen Ausdruck und dann auch durch einen um 2 kleineren dividirt, und letzterer Quotient wird um b größer als ersterer. Welches ist dieser Ausdruck?

R. $1 \pm \sqrt{\left(1 + \frac{2a}{b}\right)}$

20) In welche zwei Theile muß a getheilt werden, damit die Summe ihrer Cubi wieder a giebt?

R. Der eine ist $\frac{1}{6}[3a + \sqrt{(12 - 3a^2)}]$

der andere $\frac{1}{6}[3a - \sqrt{(12 - 3a^2)}]$

21) Welche Zahl giebt, wenn 4 von ihr und 1 von ihrem Doppelten subtrahirt wird, 8 als Summe der absoluten Quadrat-Wurzeln aus beiden Differenzen?

R. 13

22) Für welche Zahlen-Werthe von a wird der Ausdruck $a^2 + 7a - 8$ positives, für welche Null und für welche negatives liefern?

R. Positives für alle reellen Werthe von a welche kleiner als -8 und größer als $+1$ sind, Null für diese beiden Grenzwerthe selbst, und negatives für alle zwischen -8 und $+1$ fallenden Zahlen.

23) Dieselbe Aufgabe in Beziehung auf den Ausdruck $6a^2 - 17a - 333$.

R. Die Grenzwerthe sind hier 9 und $-6\frac{1}{6}$

24) Dieselbe Aufgabe für den Ausdruck:

$3a^2 - 13a + 15$

R. Er liefert für alle reellen Werthe von a immer nur positives.

25) Welches ist der Zahlenwerth des Quotienten

$\frac{a^2 + 8a - 33}{a^2 + 9a - 36}$ in dem Fall wenn $a = 3$ ist?

R. 14 : 15

26) Welches der von $\frac{28a^2 + 23a - 15}{14a^2 - 13a + 3}$ für $a = \frac{3}{7}$?

R. -47

27) Welches der von $\frac{a^3 + 3a^2 - 10a - 24}{a^2 + 4a - 21}$ für

$a = 3$?

R. $\frac{7}{2}$

28) Ein Lehrer läßt seinen Schüler zwei (absolute) Zahlen zuerst addiren, dann auch mit einander multipliciren, und der Schüler findet 538 als Summe; in Beziehung auf das vom Schüler angegebene Product läßt der Lehrer die Probe machen und dasselbe durch den kleineren der beiden Factoren dividiren, wodurch der Schüler 322 als ganzen Quotienten und 83 als Rest erhält. Der Lehrer untersucht nun die offenbar unrichtige Rechnung und findet, daß nur bei der Multiplication an der Stelle der Hunderter 9 für 6 gesetzt worden ist. Welches war hienach die kleinere der beiden Zahlen?

R. 217

29) Das letzte Glied einer gewöhnlichen arithmetischen Progression sei 19, die Differenz 3. Welche Anzahl Glieder liefert 63 zur Summe?

R. 9

30) Für welche Anzahl der natürlich auf einander folgenden ganzen Zahlen verhält sich die Summe der Cubi derselben zur Summe ihrer Quadrate wie 28 zu 5?

R. 7

31) Für welche Anzahl der natürlich auf einander folgenden ganzen Zahlen ist die Summe ihrer vierten Potenzen das 25fache der Summe ihrer Quadrate?

R. 6

32) Für welche Anzahl der natürlich auf einander folgenden ganzen Zahlen ist die Summe ihrer 5ten Potenzen das $n$fache der Summe ihrer Cubi?

R. Für die Anzahl $\frac{1}{2}[-1+\sqrt{(6n+3)}]$. Solche Anzahlen existiren also nur für diejenigen Werthe von n, für welche $6n+3$ das Quadrat einer ungeraden ganzen Zahl ist.

33) Wenn ist a ein Glied der Reihe 1, 3, 6, 10, 15 ..., d. h. eine dreieckige Zahl?

R. Wenn $8 \cdot a+1$ das Quadrat einer ungeraden ganzen Zahl ist. Der Ausdruck $\frac{1}{2}[-1+\sqrt{(8a+1)}]$ liefert dann die zugehörige Stellenzahl.

34) Wenn ist a eine fünfeckige Zahl?

R. Wenn $24a+1$ das Quadrat einer ganzen Zahl ist, welche um 1 vermehrt, eine durch 6 theilbare Zahl liefert. Die zugehörige Stellenzahl ist dann

$$\frac{1}{6}[1+\sqrt{(24a+1)}]$$

35) Kann 128 die Summe einer Anzahl Glieder einer gewöhnlichen arithmetischen Progression sein, deren erstes Glied —5 und Differenz 6 ist?

R. Ja, es ist 128 die Summe der ersten acht Glieder.

36) Ist 391 ein Glied der arithmetischen Progression zweiter Ordnung deren erstes Glied 3, die erste Differenz 17 und die zweite 9 ist?

R. Ja, das 9te Glied.

37) Für einen Gegenstand wurden beim Verkauf 112 Thaler gelöst und dabei halb so viele Procente gewonnen, als die Anzahl Thaler beträgt welche beim Einkauf für diesen Gegenstand bezahlt wurden. Welches war der Einkaufspreis?

R. 80 Thlr.

38) Für 168 Thlr. wurde eine Anzahl Scheffel Korn zu gleichen Preisen gekauft. Hätte man 6 Scheffel mehr für dieselbe Summe erhalten, so wäre jeder Scheffel 15 Sgr. wohlfeiler zu stehen gekommen. Wie viel Scheffel waren es?

R. 42 Scheffel.

39) *A* und *B* handeln mit derselben Waare, *A* hat 6 Stück mehr als *B* verkauft und beide zusammen haben 270 Thlr. gelöst. Hätte *A* zu dem Preis des *B* jedes Stück verkauft, so hätte er 108 Thlr., hätte *B* zu dem Preis des *A* verkauft, so hätte er 150 Thlr. gelöst. Wie viel Stück hat *B* verkauft?

R. 30 Stück.

40) *A* und *B* handeln mit derselben Waare, *A* hat 6 Stück mehr als *B* verkauft und beide zusammen haben 270 Thlr. gelöst. *A* hätte, bei seinem Preis für jedes Stück, aus der Waare des *B* 108 Thlr. und *B* hätte, bei seinem Preis für jedes Stück, aus der Waare des *A* 150 Thlr. gelöst. Wie viel Stück hat *B* verkauft?

R. 9 Stück.

41) Einige Kaufleute haben zu gleichen Antheilen 2000 Thlr. liegen und jeder legt noch 200 Thlr. hinzu; mit dieser Summe gewinnen sie doppelt so viel Procente als Personen sind und bei der nun erfolgenden Theilung von Kapital und Zinsen erhält jeder 65 mal so viel Thlr. als Personen sind und noch 2 Thlr. Wie viel Personen sind es?

R. 8 Personen.

42) Bei einem Ball ist die Anzahl der Herrn um 5 größer als die der Damen. Bei der Bezahlung der Kosten, welche 12 Thlr. mehr betragen als die 9fache Anzahl sämmtlicher Theilnehmer, kommen auf jeden Herren gerade so viel Thlr. als Herrn sind, und auf jede Dame halb so viel Thlr. als Damen in der Gesellschaft waren. Wie viele Damen waren es?

R. 8 Damen.

43) Zwei Körper bewegen sich gleichförmig, aus den Orten A und B gleichzeitig ausgehend, einander direct entgegen. Nachdem der erste a Meilen mehr als der zweite zurückgelegt hat, sind sie auf demselben Punkt ihres Weges; und der Schnelligkeit der Bewegung beider entsprechend, gebraucht der erste noch b Stunden um den Ort B, der zweite noch c Stunden um den A zu erreichen. Wie viele Meilen beträgt die Entfernung beider Orte?

R. $a \cdot \frac{\sqrt{b} + \sqrt{c}}{\sqrt{c} - \sqrt{b}}$ oder $\frac{a}{c-b}(b + c + 2\sqrt{bc})$

Bemerkung. Die Lösung führt bei geschickter Behandlung nur auf eine Gleichung vom ersten Grad.

44) Zwei Orte A und B sind 40 Meilen von einander entfernt. Aus A fährt ein Reisender nach B hin, macht den ersten Tag nur 3 Meilen, jeden folgenden aber immer $\frac{1}{2}$ Meile mehr als an dem vorhergehenden Tag; aus B fährt einen Tag später ein anderer Reisender auf demselben Wege nach A und macht täglich 5 Meilen. Wenn begegnen sich Beide?

R. Nach Beendigung der 4ten Tagereise des B.

45) Es soll unter eine Anzahl Personen eine Summe a zu gleichen Antheilen vertheilt werden. Bei der Vertheilung finden sich aber b Personen weniger und es kommt dadurch auf jede ein um c größerer Antheil. Wie viel Personen waren es anfänglich?

R. $\frac{1}{2c}[bc + \sqrt{(b^2c^2 + 4abc)}]$

46) Ein Behältniß von 138 Cubicfuß Inhalt wird von drei Röhren mit Wasser gefüllt, wenn die zweite 1 Stunde länger und die dritte 2 Stunden kürzere Zeit fließt als die erste, jede aber in jeder Stunde eben so viele Cubic-Fuß Wasser zuführt, als die Menge Stunden beträgt, während welcher sie fließt. Wie lange speiste die erste?

R. 7 Stunden.

47) Ein Behältniß welches a Eimer fassen kann, wird durch n Zuleitungs-Röhren gefüllt, wenn jede folgende d Stunden länger fließt als die vorhergehende und jede in jeder Stunde so viel Eimer liefert als die Zeit, während welcher sie fließt, Stunden zählt. Wie viele Stunden muß die erste fließen?

R. $\frac{1}{n}\left[-d \cdot n_2 + \sqrt{\left(n \cdot \frac{2a - (n+1)_3 d^2}{2}\right)}\right]$

48) Vier Zahlen, von welchen die zweite um 3 größer ist als die erste, die Summe der ersten und dritten 7 und die Summe der ersten und vierten 10 beträgt, liefern, wenn ihre Cubi addirt werden, 770 zur Summe. Welches ist die erste?

R. Sowohl 5 als auch 2 genügen.

49) Das Product der Exponenten zu den Dignanden 7 und 9 sei $= 6$, das Product der Potenzen selbst $= 27783$. Welches ist der Exponent von 7?

R. Er kann 3 so wie auch 2,2583 . . . sein.

50) Das Product der Exponenten zu den Dignanden a und b sei $= c$; die Potenz zu a dividirt durch die zu b gebe d zum Quotienten. Welches ist der Exponent zu a?

R. $\frac{1}{2\log a}\left[\log d \pm \sqrt{[(\log d)^2 + 4c \log a \log b]}\right]$

VI. Aufgaben welche auf algebraische Gleichungen von höhern Graden führen.

1) Zwei um 6 verschiedene Zahlen liefern, wenn ihr Product mit ihrer Summe multiplicirt wird, die Zahl 1820. Welches ist die kleinere?

R. 7; auch $-8+i\sqrt{66}$ und auch $-8-i\sqrt{66}$

2) Zu einer Zahl 1720 addirt und aus der Summe die Cubic-Wurzel genommen, giebt eine Zahl welche sich zur gesuchten wie 3 zu 2 verhält. Welches ist diese Zahl?

R. 8; $-4+\frac{2i}{9}\sqrt{966}$; $-4-\frac{2i}{9}\sqrt{966}$

3) Welche Zahl giebt, wenn sie mit 12 weniger als ihr Quadrat beträgt, multiplicirt wird, das Product 16?

R. 4; -2

4) Welche Zahl liefert, wenn sie mit ihrem Quadrat weniger 27 multiplicirt und zu diesem Product 54 addirt wird, die Summe Null?

R. 3; -6

5) Welche Zahl giebt, wenn man 3 von ihr subtrahirt und dann die Differenz cubirt, eben so viel als das um 15 vermehrte Quadrat dieser Zahl?

R 7; $\frac{1}{2}(3+i\sqrt{15})$; $\frac{1}{2}(3-i\sqrt{15})$

6) Die Summe der Cubi zweier um 7 verschiedenen Zahlen ist 10197. Welches ist die kleinere?

R. 13; $\frac{1}{4}(-47+i\sqrt{3855})$; $\frac{1}{4}(-47-i\sqrt{3855})$

7) Die Differenz der vierten Potenzen zweier um Eins verschiedenen Zahlen ist $=\frac{39}{16}$. Welches ist die kleinere von beiden?

R. $\frac{1}{4}$; $\frac{-7+i\sqrt{43}}{8}$; $\frac{-7-i\sqrt{43}}{8}$

8) Das Doppelte einer Zahl von 3 subtrahirt und diese Differenz mit dem Doppelten des Quadrats derselben Zahl multiplicirt giebt 1 als Product. Welches ist diese Zahl?

R. $\frac{1}{2}$; $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$; $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$

9) Die Summe der Cubi der ersten sechs Glieder einer gewöhnlichen arithmetischen Progression, deren erstes Glied 5 ist, beträgt 17625. Welches ist die Differenz dieser Progression?

R. 3; $\frac{5}{3}(-2+i\sqrt{5})$; $\frac{5}{3}(-2-i\sqrt{5})$

10) Die Summe der Quadrate der ersten vier Glieder einer geometrischen Progression, deren erstes Glied 8 ist, beträgt 1261. Welches ist der constante Factor?

R. $\frac{3}{2}$; $-\frac{3}{2}$;

$$\sqrt{\frac{-13+11i\sqrt{3}}{8}};\ -\sqrt{\frac{-13+11i\sqrt{3}}{8}};$$

$$\sqrt{\frac{-13-11i\sqrt{3}}{8}};\ -\sqrt{\frac{-13-11i\sqrt{3}}{8}}$$

11) Das Product von drei auf einander folgenden Gliedern einer gewöhnlichen arithmetischen Progression zur Differenz 5 ist 312. Welches ist das erste Glied?

R. 3; $-9+i\sqrt{23}$; $-9-i\sqrt{23}$

12) Die Summe der vierten Potenzen der vier ersten Glieder einer gewöhnlichen arithmetischen Progression, deren Differenz 3 ist, beträgt 19378. Welches ist das erste Glied?

R. 2; -11; $\frac{-9+i\sqrt{439}}{2}$; $\frac{-9-i\sqrt{439}}{2}$

13) Die Summe des ersten und fünften Gliedes einer geometrischen Progression ist um das 43fache des ersten Gliedes größer als die Summe der drei dazwischen liegenden Glieder. Welches ist der constante Factor dieser Progression?

R. 3; $a+b-\frac{2}{3}$; $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}a+\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}b-\frac{2}{3}$ und $\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}a+\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}b-\frac{2}{3}$, wenn unter a und b die Ausdrücke $\frac{1}{3}\sqrt[3]{(-152+3\sqrt{2715})}$ und $\frac{1}{3}\sqrt[3]{(-152-3\sqrt{2715})}$ verstanden werden.

14) Für welche Anzahl der Cubi der natürlich auf einander folgenden ganzen Zahlen ist das Quadrat dieser Anzahl um 405 kleiner als die Summe dieser dritten Potenzen?

R. 6; die übrigen der Gleichung genügenden Wurzeln $-7{,}0496\ldots$; $-0{,}4752\ldots+i\sqrt{38{,}0742\ldots}$ und $-0{,}4752\ldots-i\sqrt{38{,}0742\ldots}$ können der Aufgabe nicht entsprechen.

15) Die Summe der Quadrate einer Anzahl Glieder der Reihe der natürlich auf einander folgenden ganzen Zahlen ist 506. Wie viel Glieder sind es?

R. 11

16) Ein Kugelhaufen welcher eine vollständige dreiseitige Pyramide bildet, enthält 220 Kugeln. Wie viele liegen in jeder Seite der untersten Schicht?

R. 10

17) Wenn aber so ein Haufen horizontal abgekürzt ist, 934 Kugeln enthält und in jeder Seite der obersten Schicht 6 Kugeln liegen; wie viele liegen dann in jeder Seite der untersten Schicht?

R. 17

18) Ein Kugelhaufen welcher ein symmetrisch abgekürztes Prisma bildet, aber nicht vollständig ist, hat in der obersten horizontalen Schicht 5 Reihen jede aus 10 Kugeln bestehend, und enthält 2096 Kugeln. Wie viele Schichten sind es?

R. 12

19) Einige Personen haben vereint 6000 Thlr. zu gleichen Antheilen. Hiezu legt jeder noch 6mal so viel Thlr. als Personen sind, und sie gewinnen mit der ganzen Summe halb so viele Procente als es Personen sind. Bei der Theilung des Gewinnes erhält jeder die Hälfte seiner Zulage zurück und es bleiben doch noch 30 Thlr. übrig. Wie viele Personen waren es?

R. 10

20) Ein Wasserbehälter kann durch drei Röhren gespeist werden. Fließt das Wasser aus allen dreien zugleich, so erfolgt die Füllung in $2\frac{2}{3}$ Stunden; liefert nur die zweite Wasser so sind zwei, fließt nur Wasser aus der dritten so sind 6 Stunden mehr erforderlich, als wenn die erste allein den Behälter füllen sollte. In welcher Zeit wird er hiernach durch die erste gefüllt?

R. In 6 Stunden.

21) Von einem vollen Faß Wein wird ein gewisser Theil abgezapft und dann das Faß mit Wasser wieder angefüllt, dann abermals von dieser Mischung dieselbe Menge abgelassen und wieder mit Wasser das Faß voll gemacht. Nachdem dieß noch zum drittenmal wiederholt ist, bleibt nur noch so viel Wein im Faß als zuerst abgezapft wurde. Der wie vielste Theil des ganzen Inhaltes wurde jedesmal abgelassen?

R. Der $1 + \sqrt[3]{\frac{-9 + \sqrt{93}}{18}} - \sqrt[3]{\frac{9 + \sqrt{93}}{18}}$ ste, d. h. der 0,31767 . . . ste Theil.

22) Welches sind die sechs Wurzeln der reciproken Gleichung $x^6 - 3x^5 - 21x^4 - 34x^3 - 21x^2 - 3x + 1 = 0$?

R. -1; -1; -1; -1; $\frac{7 + 3\sqrt{5}}{2}$ und $\frac{7 - 3\sqrt{5}}{2}$.

Dritte Abtheilung.

Aufgaben welche auf algebraische Gleichungen mit mehr Unbekannten führen.

VII. Vermischte Aufgaben ohne Anordnung nach der Anzahl der Unbekannten und dem Grad der entstehenden Endgleichung.

1) Welche Ausdrücke geben a als Summe und b als Differenz?

R. $\frac{a+b}{2}$ und $\frac{a-b}{2}$

2) Welche a zur Summe und b als Product?

R. $\frac{1}{2}[a+\sqrt{(a^2-4b)}]$ und $\frac{1}{2}[a-\sqrt{(a^2-4b)}]$

3) Welche a als Summe und b als Quotient?

R. $\frac{ab}{1+b}$ und $\frac{a}{1+b}$

4) Welche a als Differenz und b als Product?

R. $\frac{1}{2}[a\pm\sqrt{(a^2+4b)}]$ und $\frac{1}{2}[-a\pm\sqrt{(a^2+4b)}]$

5) Welche a als Differenz und b als Quotient?

R. $\frac{ab}{b-1}$ und $\frac{a}{b-1}$

6) Welche a als Product und b als Quotient?

R. $\pm\sqrt{ab}$ und $\pm\sqrt{\frac{a}{b}}$

7) Zwei Zahlen von folgenden Eigenschaften zu bestimmen: die erste mit 4 und die zweite mit 3 multiplicirt soll

1, aber die erste mit 20 und die zweite mit 9 multiplicirt soll 9 als Summe der beiden Producte liefern.

R. $\frac{3}{4}$ und $-\frac{2}{3}$

8) A sagt zu B: gieb mir a Thlr. von deinem Geld, so habe ich so viel wie du; B erwidert: gieb du mir so viel, so habe ich $n$mal so viel als du. Wie viel hat jeder?

R. A hat $\frac{3+n}{n-1}a$; B hat $\frac{3n+1}{n-1}a$ Thlr.

9) Es besitzt jemand zwei an einander liegende Häuser nebst einem dazu gehörigen Garten, er fordert fürs ganze Grundstück die Summe von 25000 Thlr., fürs erste Haus nebst Garten 17000 Thlr., fürs zweite Haus und den Garten 15000 Thlr. Wie hoch rechnet er jeden Gegenstand einzeln?

R. Das erste Haus zu 10000, das zweite zu 8000, den Garten zu 7000 Thlr.

10) Welcher Bruch wird $= b$ wenn a zum Zähler sowohl als zum Nenner addirt, und $= c$ wenn a von beiden subtrahirt wird?

R. Der, dessen Zähler $\frac{2bc-b-c}{c-b}a$ und dessen Nenner $\frac{b+c-2}{c-b}a$ ist, aber nicht der ihm gleiche Bruch $\frac{2bc-b-c}{b+c-2}$

11) Welcher Bruch wird $=\frac{2}{3}$ wenn 5 und $=\frac{3}{4}$ wenn 9 zum Zähler und Nenner addirt wird?

R. $\frac{3}{7}$

12) Welcher Bruch liefert $\frac{1}{2}$ wenn 7 und $\frac{1}{8}$ wenn 13 sowohl vom Zähler als vom Nenner subtrahirt wird?

R. $\frac{14}{21}$

13) Welcher Bruch wird $= \frac{2}{3}$ wenn 5 zum Zähler addirt und vom Nenner subtrahirt, aber $\frac{1}{4}$ wenn 5 vom Zähler subtrahirt und zum Nenner addirt wird?

R. $\frac{15}{35}$

14) Welche Ausdrücke geben a als Summe und b als Differenz ihrer Quadrate?

R. $\frac{a^2 + b}{2a}$ und $\frac{a^2 - b}{2a}$

15) Welche a als Summe und b als Summe ihrer Quadrate?

R. Ihr Product ist $= \frac{a^2 - b}{2}$ und hieraus und aus der bestimmten Summe a folgen aus 2) beide Ausdrücke, nämlich $\frac{1}{2}[a + \sqrt{(2b - a^2)}]$ und $\frac{1}{2}[a - \sqrt{(2b - a^2)}]$

16) Zwei Ausdrücke zu finden, deren Differenz $= a$ und die Summe ihrer Quadrate $= b$ ist.

R. Ihr Product ergiebt sich $= \frac{b - a^2}{2}$ und hieraus in Verbindung mit der gegebenen Differenz a folgt dann nach 4) der Minuend $= \frac{1}{2}[a \pm \sqrt{(2b - a^2)}]$
der Subtrahend $= \frac{1}{2}[-a \pm \sqrt{(2b - a^2)}]$

17) Welche Ausdrücke aber sind es, wenn ihre Differenz $= a$ und die Differenz ihrer Quadrate $= b$ werden soll?

R. Der Minuend ist $= \frac{b + a^2}{2a}$,
der Subtrahend $= \frac{b - a^2}{2a}$

18) Welche zwei Ausdrücke liefern a zur Summe und b zur Summe ihrer Cubi?

R. Ihr Product wird $= \frac{a^3 - b}{3a}$ und dann folgen nach 2) die beiden Ausdrücke $\frac{1}{2}\left[a + \sqrt{\left(\frac{4b - a^3}{3a}\right)}\right]$ und $\frac{1}{2}\left[a - \sqrt{\left(\frac{4b - a^3}{3a}\right)}\right]$

19) Welche aber a als Differenz und b als Differenz ihrer Cubi?

R. Ihr Product wird $\frac{b - a^3}{3a}$, und dann folgt

der Minuend $= \frac{1}{2}\left[a \pm \sqrt{\left(\frac{4b - a^3}{3a}\right)}\right]$

der Subtrahend $= \frac{1}{2}\left[-a \pm \sqrt{\left(\frac{4b - a^3}{3a}\right)}\right]$

20) Zwei Ausdrücke von folgenden Eigenschaften zu bestimmen: wird zu jedem a addirt, so soll b, wird aber zu jedem c addirt, so soll d als das Product beider Summen entstehen.

R. Es ergiebt sich die Summe beider $= \frac{c^2 - a^2 + b - d}{a - c}$ und ihr Product $= \frac{a^2 c - a c^2 + a d - b c}{a - c}$ und hieraus folgen dann nach 2) beide Ausdrücke selbst.

21) Die Summe zweier Zahlbilder mit der Summe ihrer Quadrate multiplicirt soll a und die Differenz derselben mit der Differenz ihrer Quadrate multiplicirt, soll b geben. Welches sind dieselben?

R. Ihre Summe ist $= \sqrt[3]{(2a - b)}$, ihr Product $= \frac{a - b}{2\sqrt[3]{(2a - b)}}$ und hieraus nach 2) die Ausdrücke selbst

$$\frac{1}{2}\left[\sqrt[3]{(2a - b)} + \sqrt[6]{\left(\frac{b^3}{2a - b}\right)}\right] \text{ und}$$

$$\frac{1}{2}\left[\sqrt[3]{(2a - b)} - \sqrt[6]{\left(\frac{b^3}{2a - b}\right)}\right]$$

22) Welche zwei Zahlen haben die Eigenschaft, daß sich ihre Summe, ihr Product und die Differenz ihrer Quadrate wie die Zahlen 1, 2 und 3 verhalten?

R. 6 und 3 so wie auch 1 und -2

23) Welches sind aber die Ausdrücke, wenn die drei

Verbindungen, Summe, Differenz und Product beider sich wie $a : b : c$ verhalten sollen?

R. $\frac{1}{2a}[2b + c \pm \sqrt{(4b^2 + c^2)}]$ und

$\frac{1}{2a}[2b - c \pm \sqrt{(4b^2 + c^2)}]$

24) Wird zum Product zweier Zahlen ihre Summe addirt, so entsteht 49; wird aber die Summe ihrer Quadrate zum Producte beider hinzugezählt, so entsteht 133. Welches sind diese beiden Zahlen?

R. Ihre Summe ist 13, auch -14; ihr Product 36, auch 63; und beide Zahlen selbst sowohl 4 und 9 als auch $-7 + i\sqrt{14}$ und $-7 - i\sqrt{14}$

25) Die Summe zweier Zahlen sei 7, die ihrer vierten Potenzen 641. Welches sind diese Zahlen?

R. Ihr Product ist 10, auch 88; und die Zahlen selbst sowohl 5 und 2 als auch $\frac{1}{2}(7 + i\sqrt{303})$ und $\frac{1}{2}(7 - i\sqrt{303})$

26) Welche zwei Ausdrücke geben a zum Rest wenn die Summe ihrer Quadrate vom Quadrat ihrer Summe, und b als Rest wenn die Summe ihrer Cubi vom Cubus ihrer Summe subtrahirt wird?

R. Ihr Product ist $= \frac{a}{2}$; ihre Summe $= \frac{2b}{3a}$ und die Ausdrücke selbst sind daher $\frac{1}{6a}[2b + \sqrt{(4b^2 - 18a^3)}]$ und $\frac{1}{6a}[2b - \sqrt{(4b^2 - 18a^3)}]$

27) Die Summe, das Product und die Summe der Quadrate zweier Ausdrücke geben addirt a und das Quadrat ihrer Summe ist um b größer als ihr Product. Welches sind diese Zahlbilder?

R. Ihre Summe ist $= a - b$; ihr Product $= (a-b)^2 - b$ und daher beide Ausdrücke $\frac{1}{2}[a - b + \sqrt{(4b - 3(a-b)^2)}]$ und $\frac{1}{2}[a - b - \sqrt{(4b - 3(a-b)^2)}]$

28) Die Summe zweier Zahlen sei $= 5$, die Summe ihrer Cubi mit der Summe ihrer Quadrate multiplicirt, gebe 455. Welches sind diese Zahlen?

R. Ihr Product ist 6, auch $\frac{89}{6}$; also beide Zahlen 2 und 3, auch $\frac{1}{6}(15 + i\sqrt{309})$ und $\frac{1}{6}(15 - i\sqrt{309})$.

29) Die Summe der Cubi zweier Ausdrücke subtrahirt vom Cubus ihrer Summe giebt a und die Summe ihrer Biquadrate abgezogen vom Biquadrat ihrer Summe läßt b zum Rest. Wie bestimmen sich beide Ausdrücke?

R. Bezeichnet p ihr Product, so bestimmt sich p aus der Gleichung $18p^3 + 9bp - 4a^2 = 0$ und dann die Summe durch $\frac{a}{3p}$. Für p entsteht nur ein reeller Werth und dieser ist

$$\sqrt[3]{\left[\frac{a^2}{9} + \sqrt{\left(\frac{a^4}{81} + \frac{b^3}{216}\right)}\right]} + \sqrt[3]{\left[\frac{a^2}{9} - \sqrt{\left(\frac{a^4}{81} + \frac{b^3}{216}\right)}\right]}$$

30) Drei Ausdrücke zu bestimmen, für welche die Summe je zweier weniger dem dritten die Differenzen a, b, c erzeugen?

R. $\frac{a+b}{2}$; $\frac{a+c}{2}$; $\frac{b+c}{2}$

31) Welche drei Ausdrücke liefern aber, wenn das Product je zweier durch den dritten dividirt wird, die Quotienten a, b, c?

R. $\sqrt{ab}$; $\sqrt{ac}$; $\sqrt{bc}$, entweder alle drei positiv oder nur einer positiv, die beiden andern aber negativ genommen.

32) Welche zwei Zahlen geben zum Product 12 und 91 als Summe ihrer Cubi?

R. Für ihre Summe S entsteht die Gleichung

$S^3 - 36S - 91 = 0$ und ihr entsprechen die 3 Zahlen 7; $\frac{-7 + i\sqrt{3}}{2}$ und $\frac{-7 - i\sqrt{3}}{2}$. Die verlangten Zahlen ergeben sich daher 4 und 3; auch $-2 + 2i\sqrt{3}$ und $-\frac{3}{2} - \frac{3}{2}i\sqrt{3}$; und $-2 - 2i\sqrt{3}$ und $-\frac{3}{2} + \frac{3}{2}i\sqrt{3}$.

33) Welche zwei Zahlen geben 34 als Summe ihrer Quadrate und 152 als Summe ihrer Cubi?

R. Bezeichnet S ihre Summe, p ihr Product, so finden sich S und p aus

$$S^3 - 102S + 304 = 0 \text{ und}$$
$$2p = S^2 - 34;$$

für die beiden Zahlen selbst entsteht dann 5 und 3,

$$\text{auch } \tfrac{1}{2}[-4 + 3\sqrt{6} + \sqrt{(-2 + 24\sqrt{6})}]$$
$$\text{und } \tfrac{1}{2}[-4 + 3\sqrt{6} - \sqrt{(-2 + 24\sqrt{6})}]$$

oder 5,441 . . . und $-2{,}093$ . . . und endlich auch noch

$$\tfrac{1}{2}[4 + 3\sqrt{6} + i\sqrt{(2 + 24\sqrt{6})}] \text{ und}$$
$$\tfrac{1}{2}[4 + 3\sqrt{6} - i\sqrt{(2 + 24\sqrt{6})}]$$

34) Diejenigen zwei Zahlen zu ermitteln, deren Summe sich zur Summe ihrer Cubi wie 2 zu 5 und deren Summe ihrer Quadrate sich zur Summe ihrer vierten Potenzen wie 8 zu 23 verhält.

R. Es ergiebt sich die Summe beider $= \pm\sqrt{7}$ auch $\pm\frac{1}{4}\sqrt{70}$, im ersten Fall ihr Product $= \frac{3}{2}$; im zweiten $= \frac{5}{8}$; und es entstehen vier Paare solcher Zahlen, nämlich $\frac{\sqrt{7} \pm 1}{2}$; $\frac{-\sqrt{7} \pm 1}{2}$; $\frac{\sqrt{70} \pm \sqrt{30}}{8}$ und dann auch noch das Paar $\frac{-\sqrt{70} \pm \sqrt{30}}{8}$

35) Die beiden Zahlen zu bestimmen, welche, wenn man zu ihrem Product ihre Summe addirt, 23 und wenn man zu ihrem Product die Summe ihrer Cubi addirt, 167 liefern.

R. Bezeichnet S ihre Summe, p ihr Product, so bestimmen sich S und p aus

$$S^3 + 3S^2 - 70S - 144 = 0$$

und $S + p = 23$

woraus $S = 8$, $p = 15$, auch $S = -2$, $p = 25$ und $S = -9$, $p = 32$ folgt; die beiden Zahlen sind dann 5 und 3; $-1 + 2i\sqrt{6}$ und $-1 - 2i\sqrt{6}$; so wie auch $\frac{1}{2}(-9 + i\sqrt{47})$ und $\frac{1}{2}(-9 - i\sqrt{47})$

36) Welche drei Ausdrücke haben die Eigenschaft daß die Quotienten des Products je zweier durch ihre Summe $= a, b, c$ werden?

R. $$\frac{2abc}{(a+b)c - ab};\ \frac{2abc}{(a+c)b - ac};\ \frac{2abc}{(b+c)a - bc}$$

Bemerkung. Bezeichnen x, y die ersten beiden der gesuchten Ausdrücke, so ist die erste Gleichung $\frac{xy}{x+y} = a$; wird diese in $\frac{1}{y} + \frac{1}{x} = \frac{1}{a}$ umgeformt, dann $\frac{1}{y}$ durch y', $\frac{1}{x}$ durch x' bezeichnet und dasselbe bei den beiden übrigen Gleichungen gethan, so erhält man x', y', z' durch leichtere Entwicklung und hat dann auch x, y und z.

37) Die drei Ziffern einer Zahl bilden eine gewöhnliche arithmetische Progression; die Zahl selbst durch die Summe ihrer Ziffern dividirt giebt 48; und die mit denselben Ziffern aber in umgekehrter Reihefolge gebildete Zahl ist um 396 kleiner als die gesuchte. Welches ist sie?

R. 864

38) Diejenigen zwei Zahlen zu finden, deren Summe ihrer Quadrate, das Quadrat ihres Products und die Differenz ihrer Cubi dasselbe Resultat liefern.

R. Bezeichnet d ihre Differenz, p ihr Product, so bestimmt sich d aus der Gleichung $d^3 - 2d^2 - 2d + 2 = 0$ deren drei Wurzeln 2,4812...; 0,6889... und $-$ 1,1701... sind; dann folgt $p = \frac{d^3 - d^2}{2 - 3d}$ und beide Zahlen sind

$\frac{1}{2}[d \pm \sqrt{(d^2 + 4p)}]$ und $\frac{1}{2}[-d \pm \sqrt{(d^2 + 4p)}]$. Hieraus folgen dann beide verlangten Zahlen

1) $1{,}2406 + 0{,}3687 \cdot i$ und $-1{,}2406 + 0{,}3687 \cdot i$
2) $1{,}2406 - 0{,}3687 \cdot i$ und $-1{,}2406 - 0{,}3687 \cdot i$
3) 1,8716 und 1,1827
4) $-1{,}1827$ und $-1{,}8716$
5) $-0{,}5850 + 0{,}4437 \cdot i$ und $0{,}5850 + 0{,}4437 \cdot i$
6) $-0{,}5850 - 0{,}4437 \cdot i$ und $0{,}5850 - 0{,}4437 \cdot i$

In den ersten beiden Fällen entsteht für jede der drei in der Aufgabe genannten Verbindungen das Resultat 2,806...; im 3ten und 4ten das 4,901...; im 5ten und 6ten das 0,290...

39) Ein Bassin hat Wasserzufluß aus drei Röhren; fließt das Wasser aus der ersten und zweiten zugleich, so erfolgt die Füllung in 15, durch die erste und dritte in 18 und durch die zweite und dritte in 30 Stunden. Wie viele Stunden braucht jede Röhre zur Füllung, wenn sie allein Wasser zuführt?

R. Die erste $22\frac{1}{2}$, die zweite 45, die dritte 90 Stunden. Erfolgt der Zufluß aus allen dreien zugleich, so sind $12\frac{6}{7}$ Stunden Zeit erforderlich. (S. Bemerkung zu 36.)

40) Drei Stücke Metall bestehen jedes aus Gold, Silber und Kupfer. Das erste enthält von diesen Materien die Mengen 3, 9, 18; das zweite die 10, 14, 24; das dritte die 4, 13, 8. Wie viel ist von jedem Stück zu nehmen und zu verschmelzen, um eine Masse zu erhalten, welche von diesen Materien die Mengen 10, 23 und 26 enthält?

R. 10, 24 und 25.

41) Bacchus findet den schlafenden Silen bei einem vollen Faß. Bacchus trinkt daraus während $\frac{3}{5}$ der Zeit, in welcher Silen dasselbe geleert haben würde, dann trinkt Silen den Rest. Hätten sie zugleich getrunken, so wären sie 6 Stunden früher fertig geworden und Bacchus hätte nur

$\frac{2}{3}$ von dem getrunken was er dem Silen übrig gelassen hat. In wie viel Stunden würde hienach jeder einzeln das Faß leeren?

R. Bacchus in 15, Silen in 10 Stunden.

42) Die Summe von drei aufeinander folgenden Gliedern einer geometrischen Progression sei $= a$, die Summe ihrer Quadrate $= b$. Welches sind diese Glieder?

R. $\frac{1}{4a}\left[a^2 + b \pm \sqrt{(10a^2b - 3a^4 - 3b^2)}\right]$;

$\frac{a^2 - b}{2a}$ und $\frac{1}{4a}\left[a^2 + b \mp \sqrt{(10a^2b - 3a^4 - 3b^2)}\right]$

43) Man verlangt n Ausdrücke den Bedingungen entsprechend, daß die $m_1$fache Summe aller weniger dem $m_1 + 1$fachen des ersten $= a_1$; die $m_2$fache Summe aller, weniger dem $m_2 + 1$fachen des zweiten u. s. w. zuletzt die $m_n$fache Summe aller weniger dem $m_n + 1$fachen des $n$ten $= a_n$ wird.

R. Wird $\frac{m_1}{1 + m_1} + \frac{m_2}{1 + m_2} + \ldots + \frac{m_n}{1 + m_n} = M$

und $\frac{a_1}{1 + m_1} + \frac{a_2}{1 + m_2} + \ldots + \frac{a_n}{1 + m_n} = A$ gesetzt, so

ist die Summe S aller verlangten Ausdrücke $= \frac{A}{M - 1}$

und die Ausdrücke selbst sind:

$\frac{m_1}{1 + m_1} S - \frac{a_1}{1 + m_1}$; $\frac{m_2}{1 + m_2} S - \frac{a_2}{1 + m_2}$; u. s. w.

$\frac{m_n}{1 + m_n} S - \frac{a_n}{1 + m_n}$

44) Es spielen 6 Personen; jeder hat nach der Folge einmal die Bank und allemal setzt jeder der übrigen sein sämmtliches bei sich habendes Geld. Jeder Banquier verliert und am Schluß des sechsten Spiels besitzt jeder 64 Thlr. Wie viel hatte jede der 6 Personen anfänglich?

R. 193; 97; 49; 25; 13; 7 Thlr.

45) Dieselbe Aufgabe allgemeiner. Es waren n Personen und zuletzt hatte der erste die Summe A, der zweite die B, der dritte die C u. s. w. und der letzte oder $n$te die N. Wie viel hatte jeder vor Beginn des Spiels?

R. Bezeichnet S die Summe $A + B + C + \ldots + N$, so waren diese Besitze nach der Folge $A \cdot 2^{-n} + S \cdot 2^{-1}$; $B \cdot 2^{-n} + S \cdot 2^{-2}$; $C \cdot 2^{-n} + S \cdot 2^{-3}$; u. s. w. und für den $n$ten $N \cdot 2^{-n} + S \cdot 2^{-n}$

46) Es werden fünf Zahlen verlangt, von welchen das Quadrat der ersten mit der zweiten, das Quadrat der zweiten mit der dritten, das Quadrat der dritten mit der vierten u. s. f., zuletzt das Quadrat der fünften mit der ersten multiplicirt, die Producte 45, 50, 16, 96 und 108 liefert.

R. Diese Zahlen sind 3; 5; 2; 4; 6

47) Dieselbe Aufgabe allgemein, wenn n Ausdrücke unter denselben Bestimmungen verlangt werden und p_1; p_2; $p_3 \ldots p_{n-1}$; p_n die festgesetzten Producte bezeichnen.

R. Ist n ungerade, so wird der erste Ausdruck

$$= \sqrt[2^n+1]{\frac{p_1^{2^{n-1}} \cdot p_3^{2^{n-3}} \cdots p_{n-2}^{2^1} \cdot p_n^{2^0}}{p_2^{2^{n-2}} \cdot p_4^{2^{n-4}} \cdots p_{n-3}^{2^3} \cdot p_{n-1}^{2^1}}};$$

ist aber n gerade, so wird derselbe

$$= \sqrt[2^n-1]{\frac{p_1^{2^{n-1}} \cdot p_3^{2^{n-3}} \cdots p_{n-3}^{2^3} \cdot p_{n-1}^{2^1}}{p_2^{2^{n-2}} \cdot p_4^{2^{n-4}} \cdots p_{n-2}^{2^2} \cdot p_n^{2^0}}};$$

die übrigen Ausdrücke gehen dann leicht aus den Gleichungen hervor. Zu den angegebenen Resultaten gelangt man leicht, wenn man die Gleichungen nach der Folge mit 2^{n-1}; 2^{n-2}; 2^{n-3} u. s. w. bis 2^0 potenzirt, dann die 2te, 4te 6te u. s. w. umgekehrt schreibt und zuletzt das Product dieser so entstandenen n Gleichungen bildet.

48) Die Summe der Quadrate der Exponenten zu a und b sei $= c$, das Product der beiden Potenzen $= d$. Welches sind die Exponenten?

R. Werden $\log a$, $\log b$, $\log d$ durch A, B, D ausgedrückt, so ist der Exponent zu a

$$= \frac{AD \pm B\sqrt{[c(A^2 + B^2) - D^2]}}{A^2 + B^2}$$ und der zu b

$$= \frac{BD \mp A\sqrt{[c(A^2 + B^2) - D^2]}}{A^2 + B^2}$$

49) Die Wurzel-Exponenten zu den Radicanden a und b ersterer mit c, letzterer mit d multiplicirt, geben die Summe k; das Product der Wurzeln sei $= h$. Welches sind die Exponenten?

R. Bezeichnet x den zu a, so bestimmt sich der Werth aus der Gleichung

$$c \log h \cdot x^2 - (c \log a + k \log h - d \log b)x + k \log a = 0$$

VIII. Anwendungen des Satzes von den unbestimmten Coefficienten.

1) Den Quotienten $\frac{1}{1 - x}$ in eine nach den ganzen steigenden Potenzen von x ins Unendliche fortlaufende Reihe umzuformen.

R. $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$ *in inf.*

2) Dieselbe Aufgabe, doch sollen nur die fünf ersten Glieder und dann noch das Ergänzungs-Glied bestimmt werden.

R. $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \frac{x^5}{1 - x}$

3) Dieselbe Forderung wie in 2) in Beziehung auf den Quotienten $\frac{1-x}{1+2x+3x^2}$.

R. $1-3x+3x^2+3x^3-15x^4+\frac{21x^5+45x^6}{1+2x+3x^2}$

4) Dieselbe Aufgabe für $\frac{1+x+x^2}{1-x^2}$

R. $1+x+2x^2+x^3+2x^4+\frac{x^5+2x^6}{1-x^2}$

5) Den Quotienten $\frac{3x+2}{(x+5)(2x-3)}$ in eine Summe zweier Brüche zu zerlegen, deren Nenner die Factoren des Nenners des gegebenen Bruchs sind.

R. $\frac{1}{x+5}+\frac{1}{2x-3}$

6) Dieselbe Aufgabe in Beziehung auf den Bruch

$$\frac{2+x}{6x^2+7x-5}$$

R. $\frac{1}{13}\left(\frac{5}{2x-1}-\frac{1}{3x+5}\right)$

7) Dieselbe Aufgabe für den:

$$\frac{23+7x+9x^2+3x^3}{12+10x^2+2x^4}$$

R. $\frac{2+x}{3+x^2}+\frac{5+x}{4+2x^2}$

8) Dieselbe Aufgabe für den:

$$\frac{46-34x+6x^2}{(2-x)(3-x)(4-x)}$$

R. $\frac{1}{2-x}+\frac{2}{3-x}+\frac{3}{4-x}$

9) Dieselbe Aufgabe für den:

$$\frac{3-2x+4x^2}{-15x+13x^2-2x^3}$$

R. $-\frac{1}{5x}+\frac{93}{35(5-x)}+\frac{12}{7(2x-3)}$

10) Dieselbe Aufgabe für den:

$$\frac{2+x^3}{9-x^2}$$

R. $-x+\frac{1}{6}\left(\frac{29}{3-x}-\frac{25}{3+x}\right)$

11) Die Zähler zu den drei Nennern $(1-x)^3$; $(1-x)^2$ und $1-x$ der Bedingung entsprechend zu bestimmen, daß die Summe der entstehenden drei Brüche $=\frac{3+x+x^2}{(1-x)^3}$ werde.

R. Sie werden 5; -3; 1

12) Die Zähler zu den drei Nennern $(5-x^2)^3$; $(5-x^2)^2$; $5-x^2$ der Bedingung entsprechend zu bestimmen, daß die Summe der drei entstehenden Brüche $=\frac{38+x-12x^2+x^4}{(5-x^2)^3}$ werde.

R. $3+x$; 2; 1

13) Aus der Gleichung

$$y=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\ldots \textit{ in inf.}$$

soll x nach den steigenden Potenzen von y ausgedrückt werden.

R. $x=y-\frac{y^2}{(2)}+\frac{y^3}{(3)}-\frac{y^4}{(4)}+-\ldots$ *in inf.*

14) Dieselbe Forderung in Beziehung auf

$$y=x-\frac{x^3}{(3)}+\frac{x^5}{(5)}-\frac{x^7}{(7)}+-\ldots \textit{ in inf.}$$

R. $x=y+\frac{1}{2}\cdot\frac{y^3}{3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{y^5}{5}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{y^7}{7}$
$+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}\cdot\frac{y^9}{9}+\ldots$ *in inf.*

15) Aus der Gleichung

$$x-\frac{x^2}{(2)}+\frac{x^3}{(3)}-\frac{x^4}{(4)}+-\ldots=y-y^2+y^3-y^4+-\ldots$$

soll y durch eine nach den ganzen Potenzen von x fortlaufende Reihe ausgedrückt werden.

R. $y=x+\frac{x^2}{(2)}+\frac{x^3}{(3)}+\frac{x^4}{(4)}+\ldots$

16) Aus der in 15) gegebenen Gleichung soll x durch y in eine solche Reihe nach den Potenzen von y geordnet, ausgedrückt werden.

R. $x=y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}-\frac{y^4}{4}+\frac{y^5}{5}-+\ldots$

17) Die Coefficienten einer nach den steigenden ganzen Potenzen von z geordneten Reihe der Bedingung entsprechend zu bestimmen, daß, wenn R_z diese Reihe bezeichnet, $R_{x+y}+R_{x-y}=2R_x\cdot R_y$ werde.

R. $R_z=1+az^2+\frac{a^2}{6}z^4+\frac{a^3}{90}z^6+\frac{a^4}{2520}z^8+\ldots$

oder

$$R_z=1+\frac{2a}{(2)}z^2+\frac{(2a)^2}{(4)}z^4+\frac{(2a)^3}{(6)}z^6+\frac{(2a)^4}{(8)}z^8+\ldots$$

worin a willkührlich ist.

Bemerkung. Daß das erste Glied 1 werden muß, folgt sogleich daraus, daß die Reihe auch für $z=0$ genügen muß, verbunden mit der Bedingung der Aufgabe, wenn 0 für y gesetzt wird. Setzt man dann in diese Bedingung 0 für x, so überzeugt man sich, daß nur gerade Exponenten vorkommen können.

18) Die Reihe R_x zu bestimmen, für welche $R_{x+y}\cdot R_{x-y}=(R_x)^2-(R_y)^2$ wird.

R. Es entsteht:

$$R_x=x+ax^3+\frac{3a^2}{10}x^5+\frac{3a^3}{70}x^7+\ldots$$

worin a willkührlich ist. Setzt man $\frac{a}{6}$ für a, so erhält man

$$R_x = x + \frac{a}{(3)}x^3 + \frac{a^2}{(5)}x^5 + \frac{a^3}{(7)}x^7 + \dots$$

IX. Unbestimmte Aufgaben.

1) Es besuchen Herren und Damen einen öffentlichen Vergnügungsort, jeder Herr zahlt 15, jede Dame 10 Sgr. Entrée und es beträgt diese Ausgabe für die Herren 1 Thlr. 25 Sgr. mehr als für die Damen. Wie viel Herren und Damen können es gewesen sein?

R. Anzahl Herren $= 5; 7; 9; 11; \dots$ allgemein $2n + 3$

Anzahl Damen $= 2; 5; 8; 11; \dots$ allgemein $3n - 1$

2) Wenn aber, in Beziehung auf die vorige Aufgabe, das gesammte Eintrittsgeld 4 Thlr. 5 Sgr. beträgt; wie viele Herren und Damen können es dann gewesen sein?

R. Anzahl Herren $= 1; 3; 5; 7;$ allgemein $2n + 1$

Anzahl Damen $= 11; 8; 5; 2;$ allgemein $11 - 3n$

3) Welche ganze Zahlen geben, durch 3 dividirt, 2; durch 4 dividirt, 3 zum Rest?

R. 11; 23; 35; ... allgemein $12n + 11$

4) Welche ganze Zahlen geben, durch 5; 6; 7 dividirt, die Reste 3; 2; 5?

R. 68; 278; 488; ... allgemein $210n + 68$

5) Alle die zwei positiven ganzen Zahlen zu bestimmen, deren Summe $= 1307$ ist und von welchen die eine 13, die andere 17 zum Theiler hat.

R. Die allgemeinen Formen für beide Zahlen sind
$13 \cdot (128 - 17n)$ und $17 \cdot (13n - 21)$
Es existiren also nur 6 Paar solche Zahlen, nämlich 1222 und 85; 1001 und 306; 780 und 527; 559 und 748; 338 und 969; endlich noch 117 und 1190

6) Alle die positiven ganzen Zahlen zu bestimmen, deren Differenz $= 29$ ist und von welchen der Minuend durch 7 dividirt, 4; der Subtrahend durch 11 dividirt, 9 zum Rest läßt.

R. Minuend $= 77n + 60$
Subtrahend $= 77n + 31$
Es giebt also unendlich viel solche Zahlen.

7) Alle die zwei ganzen Zahlen zu bestimmen, deren Product um 37 größer ist als ihre Summe.

R. 39 und 2; und auch 20 und 3

8) Für x und y die Werthe als positive ganze Zahlen anzugeben, welche der Gleichung $3x^2 + 2xy + 9 = 15y$ genügen.

R. Die Entwicklung von y giebt
$$y = \frac{1}{4}\left(\frac{711}{15 - 2x} - 6x - 45\right)$$
und es genügen also für x alle die positiven ganzen Zahlen, für welche $15 - 2x$ ein Theiler von 711 wird und zugleich y sich als eine positive ganze Zahl ergiebt.

Es findet sich $x = 7$; $y = 156$; dann auch $x = 6$; $y = 39$; und zuletzt nur noch $x = 3$; $y = 4$

9) Zwei ganze positive Zahlen zu bestimmen, für welche die positive Differenz um 1157 kleiner ist, als das Product aus dem Subtrahend (der kleineren von beiden Zahlen) in die Summe dieser Zahlen.

R. 1151 und 2; 379 und 4; 223 und 6; 155 und 8; 91 und 12; 59 und 16; und auch 31 und 22.

10) Welches Zahlbild giebt, wenn das Quadrat desselben zur Zahl a addirt wird, wieder ein vollständiges Quadrat?

R. $\frac{a-b^2}{2b}$

11) Zu den n beliebigen Ausdrücken a; b; $c \ldots p$; q noch einen x der Bedingung entsprechend zu bestimmen daß die Summe der Quadrate dieser $n+1$ Zahlbilder auch ein vollständiges Quadrat sei.

R. $a^2+b^2+c^2+\ldots+p^2+q^2$ durch S bezeichnet, muß $x=\frac{S-\alpha^2}{2\alpha}$ genommen werden, dann entsteht die identische Gleichung

$$(2a\alpha)^2+(2b\alpha)^2+\ldots+(2q\alpha)^2+(S-\alpha^2)^2=(S+\alpha^2)^2$$

12) Welche ganze Zahlen liefern, wenn ihr Quadrat zum Quadrat der Zahl 8 addirt wird, wieder das Quadrat einer ganzen Zahl?

R. Alle die ganzen Zahlen welche an die Stelle von α gesetzt, 2α zu einem Theiler von $64-\alpha^2$ machen, geben zum Quotienten eine solche Zahl. Es entsteht nur

$$8^2+6^2=10^2 \text{ und } 8^2+15^2=17$$

13) Welche ganze Zahlen geben quadrirt und zur Summe der Quadrate der Zahlen 5 uud 6 addirt, wieder das Quadrat einer ganzen Zahl?

R. Nur die eine Zahl 30

14) Welche ganze Zahlen geben quadrirt und zur Summe der Quadrate der Zahlen 5, 6 und 8 addirt, wieder das Quadrat einer ganzen Zahl?

R. Nur 10 und 62

15) Welche ganze Zahlen geben quadrirt und zur Summe der Quadrate von 3; 5; 7 und 8 addirt, wieder das Quadrat einer ganzen Zahl?

R. 7; 23; auch 73

16) Welche Glieder der natürlichen Zahlen-Reihe erscheinen als Differenz der Cubi zweier unmittelbar auf einander folgenden ganzen Zahlen?

R. 7; 19; 37; ... allgemein $1 + 3n(n+1)$ unter n jede beliebige absolute ganze Zahl verstanden.

17) Welche als Differenz der Cubi je zweier unmittelbar auf einander folgenden geraden ganzen Zahlen?

R. 56; 152; 296; ... allgemein $8(3n^2 + 3n + 1)$ unter n jede beliebige absolute ganze Zahl verstanden.

18) Welche als Differenz der Cubi je zweier unmittelbar auf einander folgenden ungeraden ganzen Zahlen?

R. 26; 98; 218; ... allgemein $24n^2 + 2$; unter n jede beliebige absolute ganze Zahl verstanden.

19) Für welche Zahlen-Werthe an die Stelle von x gesetzt, wird $4x^2 + 7x + 3$ das Quadrat einer rationalen Zahl?

R. Für $x = \frac{3 - z^2}{4z - 7}$ wird $4x^2 + 7x + 3$

$$= \left(\frac{6 - 7z + 2z^2}{4z - 7}\right)^2$$

unter z jede beliebige rationale Zahl verstanden.

20) Für welche Werthe von x wird $R = 5x^2 + 7x + 9$ ein Quadrat?

R. Für $x = \frac{6z - 7}{5 - z^2}$ entsteht

$$R = \left(\frac{15 - 7z + 3z^2}{5 - z^2}\right)^2$$

in welchem Ausdruck für z jede rationale Zahl zu setzen ist.

21) Für welche Werthe von x wird $R = 10x^2 + 7x - 12$ ein Quadrat?

R. Für $x = \frac{3 + 64z^2}{80z^2 - 2}$ entsteht

$$R = \left(\frac{46z}{40z^2 - 1}\right)^2$$

in welchem Ausdruck für z jede rationale Zahl zu setzen ist.

22) Es bezeichne R den Ausdruck $ax^2 + bx + c$ und a sei $= \alpha^2$, unter α so wie unter b und c jede rationale Zahl verstanden. Welche Ausdrücke für x gesetzt, liefern für R ein Quadrat?

R. $x = \frac{c - z^2}{2\alpha z - b}$ giebt

$$R = \left(\frac{\alpha c - bz + \alpha z^2}{2\alpha z - b}\right)^2$$

worin für z jede rationale Zahl zu setzen ist.

23) Die Aufgabe bleibe, aber c sei $= \alpha^2$

R. $x = \frac{2\alpha z - b}{a - z^2}$

$$R = \left(\frac{a\alpha - bz + \alpha z^2}{a - z^2}\right)^2$$

unter α und z rationale Zahlen verstanden.

24) Die Aufgabe bleibe, aber $b^2 - 4ac$ sei $= \alpha^2$

R. $x = \frac{\alpha + b + 4a(\alpha - b)z^2}{2a(4az^2 - 1)}$

$$R = \left(\frac{2\alpha z}{4az^2 - 1}\right)^2$$

wenn α und z ihre Bedeutung behalten.

25) Die Werthe für x zu bestimmen, für welche R oder $ax^2 + bx + c$ ein vollständiges Quadrat wird, wenn weder a, noch c, noch $b^2 - 4ac$ ein vollständiges Quadrat ist, aber α für x gesetzt, $R = p^2$ liefert.

R. $x = \frac{\alpha z^2 + a\alpha + b - 2pz}{z^2 - a}$

$$R = \left(\frac{2a\alpha z + bz - ap - pz^2}{z^2 - a}\right)^2$$

unter a; b; c; α; p; z rationale Zahlen verstanden.

26) Vier Gewichte zu bestimmen, mit welchen man alle Lasten in ganzen Pfunden von 1 bis 40 Pfund abwiegen kann

R. 1; 3; 9; 27 Pfund.

27) Für welche Relation zwischen den ganzen positiven Zahlen n und S existiren n nach demselben Gesetz fortlaufende ganze positive Zahlen, durch welche, sowohl einzeln genommen als zu algebraischen Summen von 2; 3; 4;... bis n Summanden verbunden, sich alle ganzen Zahlen von 1 bis S ausdrücken lassen?

R. Es muß entweder jede dieser n ganzen steigend auf einander folgenden Zahlen um 1 größer sein als die arithmetische Summe der vorhergehenden, oder um 1 größer als das Doppelte dieser Summe. Das erste Gesetz liefert die Zahlen 1; 2; 4; 8;... 2^{n-1} und die Relation $2^n = 1 + S$; das zweite die 1; 3; 9; 27;... 3^{n-1} und die Relation $3^n = 1 + 2S$. Jeder Fall, in welchem ganze Zahlen für n und S der einen oder der andern Relation entsprechen, giebt die Lösung einer solchen speciellen Aufgabe.

Bemerkung. Wechselt man mit beiden Gesetzen in beliebigen Intervallen, so lassen sich unendlich viele solche Zahlen-Reihen bilden, z. B.

1; 2; 7; 11 für $n = 4$; $S = 21$
1; 3; 5; 19; 29 für $n = 5$; $S = 57$
1; 3; 9; 27; 41 für $n = 5$; $S = 81$
1; 3; 9; 14; 55 für $n = 5$; $S = 82$
u. s. w.

Allgemein entsteht, wenn etwa für n Zahlen die ersten p Zahlen nach dem ersten, die übrigen nach dem zweiten Gesetz gebildet werden sollen, die Relation

$$(2^{p+1} - 1) \cdot 3^{n-p} = 1 + 2S$$

Vierte Abtheilung.

Algebraische Aufgaben aus den geometrischen Wissenschaften.

X. Aufgaben aus der ebenen Geometrie.

1) Ein Parallelogramm hat 294 Quadratfuß Inhalt, und Grundlinie und Höhe desselben verhalten sich wie 3 zu 2. Beide zu bestimmen.

R. 21 und 14 Fuß.

2) Ein Rechteck hat den Umfang a und den Inhalt b^2. Welches sind seine Seiten?

R. $\frac{1}{4}\left[a \pm \sqrt{(a^2 - 16b^2)}\right]$

Beide Resultate sind nur möglich, wenn $a \geqq 4b$ ist.

3) Die parallelen Seiten eines Trapezes sind 20 und 12, die nicht parallelen 15 und 17 Fuß lang. Welches ist sein Inhalt?

R. 240 Quadrat-Fuß.

4) Ein gleichseitiges Dreieck hat 17 Quadrat-Fuß und 83 Quadrat-Zoll Inhalt; wie groß ist jede Seite?

R. $6' \, 4'' \, 5{,}4'''$

5) Welches ist der Halbmesser des in einem Quadranten beschriebenen, die drei Begränzungen tangentirenden Kreises?

R. Bezeichnet r den Halbmesser des Quadranten, so ist der des Kreises $= (-1 + \sqrt{2}) \cdot r$

6) In dem einen Endpunkt eines Durchmessers d wird eine Normale errichtet, aus dem andern eine Gerade gezogen welche dieselbe schneidet. Wenn nun der Theil dieser Geraden zwischen diesem Durchschnittspunkt und dem mit der Peripherie die Länge a hat, welches ist der andere als Sehne des Kreises erscheinende Theil?

R. $-\frac{1}{2}a + \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 + d^2\right)}$

7) In einem rechtwinklichen Dreieck haben die Transversalen aus den Ecken der spitzen Winkel nach den Mittelpunkten der Catheten die Längen a, b; durch a und b die Längen dieser Catheten selbst auszudrücken.

R. Sie sind $2\sqrt{\left(\frac{4b^2 - a^2}{15}\right)}$ und $2\sqrt{\left(\frac{4a^2 - b^2}{15}\right)}$

8) In einer der drei Seiten a eines Dreiecks die Entfernung desjenigen Punktes in ihr von einem der beiden Endpunkte, der Bedingung entsprechend zu bestimmen daß das durch eine Parallele aus dem gesuchten Punkt mit der dem gewählten Endpunkt gegenüber liegenden Seite, vom ganzen Dreieck abgeschnittene Dreieck sich zum Ganzen wie n zu m verhält.

R. $a \cdot \sqrt{\frac{n}{m}}$

9) In einem Trapez, dessen Höhe $= h$ ist, und dessen parallele Seiten $= a$, b sind, soll eine mit ihnen parallele Linie, begränzt von den nicht parallelen Seiten, die Länge c haben; wie weit steht sie von jeder der parallelen Seiten a, b ab?

R. $\frac{a - c}{a - b}h$ und $\frac{c - b}{a - b}h$

10) Welches ist in Beziehung auf die vorige Aufgabe die Entfernung des Durchschnittspunktes der nicht parallelen Seiten, sowohl von a als von b?

R. $\frac{a}{a-b}h$ und $\frac{b}{a-b}h$

11) Wie groß muß in Aufgabe 9) c genommen werden, damit das Trapez, dessen parallele Seiten b und c sind, sich zum Inhalt des ganzen Trapezes wie n zu m verhält?

R. $c = \sqrt{\left[b^2 + \frac{n}{m}(a^2 - b^2)\right]}$

12) Aus zwei Puncten A, B, welche einerseits einer Geraden liegen, sind Normalen $AC = b$ und $BD = a$ auf diese Gerade gefällt und die Entfernung CD ihrer Fußpunkte sei $= c$. In welcher Entfernung von C muß der Punkt F in der Geraden genommen werden, damit die Geraden AF und BF gleiche Längen erhalten?

R. $CF = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c}$

13) Wo muß aber F in der Geraden liegen, wenn der Winkel AFC dem BFD gleich werden soll?

R. $CF = \frac{bc}{a+b}$

14) Wo in dem Fall, wenn die beiden Dreiecke ACF und BDF gleiche Inhalte erhalten sollen?

R. $CF = \frac{ac}{a+b}$

15) In welcher Entfernung muß aber dann F von C genommen werden, wenn der Inhalt des Dreiecks ABF $= d^2$ werden soll?

R. $CF = \frac{2d^2 - bc}{a-b}$

16) In welcher dann, wenn der Winkel AFB ein rechter werden soll?

R. $CF = \frac{1}{2}[c \pm \sqrt{(c^2 - 4ab)}]$

Der Punct F existirt also in diesem Fall nur dann, wenn $c \geq 2\sqrt{ab}$ ist.

17) Welches ist aber der Werth von CF, durch a, b, c ausgedrückt, in dem Fall, wenn die Gerade die Tangente des Kreises durch A, B und F in F werden soll?

R. $CF = \frac{1}{a-b}\left[-bc \pm \sqrt{\left(ab\,[c^2 + (a-b)^2]\right)}\right]$

18) Und wo muß F in der Geraden liegen, wenn sich AF zu BF wie n zu m verhalten soll?

R. $CF = \frac{2}{m^2-n^2}[-n^2c \pm \sqrt{(n^2m^2(a^2+b^2+c^2)-n^4a^2-m^4b^2)}]$

19) Wie verhalten sich der Inhalt des Kreises in einem gleichseitigen Dreieck, der Inhalt dieses Dreiecks selbst, und der Inhalt des Kreises welcher um dieses Dreieck beschrieben wird?

R. Wie die Zahlen π; $3\sqrt{3}$ und 4π

20) Wie ist dieses Verhältniß bei einem Dreieck, dessen Seiten 4, 5 und 6 sind?

R. Wie $7^2\pi$; $105\sqrt{7}$ und $16^2\pi$

21) Wie dann, wenn die Seiten die Längen a, b, c haben?

R. Wird $a + b + c$ durch S; abc durch P und der Inhalt des Dreiecks durch F ausgedrückt, so entstehen die Verhältnißzahlen $64\pi F^4$; $16 S^2 F^3$; $P^2 S^2 \pi$; in welchen F den Ausdruck

$$\frac{1}{4}\sqrt{[(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)]}$$

vorstellt.

22) Der Inhalt eines rechtwinklichen Dreiecks sei $= F$, seine Hypotenuse $= a$; wie drücken sich die Catheten durch F und a aus?

R. $\frac{1}{2}[\sqrt{(a^2 + 4F)} \pm \sqrt{(a^2 - 4F)}]$

23) Der Inhalt eines rechtwinklichen Dreiecks sei $= F$, sein Umfang $= S$. Welches sind die Seiten?

R. Die Hypotenuse $= \frac{S^2 - 4F}{2S}$;

die Catheten

$$\frac{1}{4S}\left(S^2 + 4F \pm \sqrt{[(S^2 + 4F)^2 - 32F \cdot S^2]}\right)$$

24) Zur Hypotenuse a die Catheten der Bedingung entsprechend zu bestimmen, daß die absoluten Zahlen welche den Inhalt des Dreiecks und den Umfang desselben ausdrücken, einander gleich werden.

R. $\frac{1}{2}[4 + a \pm \sqrt{(a^2 - 8a - 16)}]$

25) Für welche Werthe von a existiren solche Dreiecke?

R. Wenn a größer, mindestens gleich ist dem Zahlbild $4 + \sqrt{32}$.

26) Welche ganze Zahlen als festgesetzte Werthe von a (in 24) liefern auch für beide Catheten ganze Zahlen?

R. Nur 10 und 13; im ersten Fall werden die Catheten 8 und 6, im zweiten 12 und 5.

27) Aus einer Ecke eines Quadrats, zur Seite a, eine Gerade so zu legen, daß ihre Länge zwischen den Durchschnittspuncten mit den Richtungen der der Ecke gegenüber liegenden Seiten des Quadrats, eine festgesetzte b werde. In welchen Entfernungen liegen diese Durchschnittspuncte von der gegenüber liegenden Ecke?

R. Die absolute Differenz dieser Entfernungen ergiebt sich $= \sqrt{(a^2 + b^2)} - a$ und beide, wenn $\sqrt{(a^2 + b^2)}$ durch c bezeichnet wird, sind:

$$\frac{1}{2}\left[\pm c \mp a + \sqrt{(b^2 + 2ac - 2a^2)}\right]$$

28) Die Seiten und den Inhalt des gleichseitigen Dreiecks zu bestimmen, dessen eine Ecke mit dem einen Eckpunct eines Quadrats zusammenfällt, die beiden andern aber in den dieser Ecke gegenüber liegenden Seiten des Quadrats liegen.

R. Ist a die Seite des Quadrats, so ist die des Dreiecks $= a(\sqrt{6} - \sqrt{2})$ und der Inhalt desselben $= a^2(2\sqrt{3} - 3)$

29) Den Inhalt eines Quadrats in einem gegebenen Kreisausschnitt zu bestimmen, wenn zwei der Ecken in den Bogen, die andern beiden in die begränzenden Halbmesser fallen sollen.

R. Bezeichnet b die halbe Sehne, h die Normale aus dem Mittelpunkt des zugehörigen Kreises auf dieselbe, so ist der Inhalt $= \dfrac{4b^2 \cdot (b^2 + h^2)}{b^2 + (2b + h)^2}$

30) Welches wird aber der Ausdruck für den Inhalt des Quadrats werden, wenn nur eine Ecke in den Bogen, eine in den einen, die beiden andern aber in den andern begränzenden Halbmesser fallen sollen.

R. Ist b die Projection des einen der beiden den Ausschnitt begrenzenden Halbmesser auf den andern, und h die projicirende Linie, so ist der Inhalt des Quadrats

$$= \frac{h^2(b^2 + h^2)}{h^2 + (b + h)^2}.$$

31) Allgemeine Formen für die drei Seiten und zugehörigen Höhen derjenigen Dreiecke darzustellen, in welchen alle diese sechs Linien rational werden.

R. Bezeichnen α, β rationale ächte Brüche und n den Ausdruck $\dfrac{\alpha}{1-\alpha^2} \cdot \dfrac{1-\beta^2}{\beta}$, so sind $1 + n$; $\dfrac{1+\alpha^2}{1-\alpha^2}$; $\dfrac{\alpha}{1-\alpha^2} \cdot \dfrac{1+\beta^2}{\beta}$ die Ausdrücke für die drei Seiten und

$\frac{2\alpha}{1-\alpha^2}$; $\frac{2\alpha}{1+\alpha^2}(1+n)$; $\frac{2\beta}{1+\beta^2}(1+n)$ die für die zugehörigen Höhen.

Soll der der Seite $1+n$ gegenüber liegende Winkel ein spitzer, ein stumpfer, ein rechter werden, so muß α größer, kleiner, gleich dem Ausdruck $\frac{1-\beta}{1+\beta}$ sein; sollen die beiden andern Seiten gleich werden, so ist $\alpha = \beta$ zu nehmen.

Anmerkung. Hienach sind die drei Zeilen 7, 8, 9 pag. 101 der „reinen Mathematik und mechanischen Wissenschaften" vom Verfasser (Berlin 1845 bei Duncker) zu verbessern.

32) Zu Aufgabe 31) einige solche Dreiecke in Zahlen anzugeben.

R. Zu den Seiten 36, 29, 25 ist auch der der ersten Seite gegenüber liegende Winkel spitz und die drei Höhen rational.

Zu den Seiten 21, 17, 6 ist der der Seite 21 gegenüber liegende Winkel stumpf und die 3 Höhen rational.

Im ersten Fall ist $\beta = \frac{1}{2}$; $\alpha = \frac{2}{5}$; im zweiten $\beta = \frac{1}{2}$; $\alpha = \frac{1}{4}$ angenommen.

Sollen im ersten Fall alle 6 Linien in ganzen Zahlen ausgedrückt werden, so entstehen für die Seiten die Zahlen 5220; 4205; 3625 und für die zugehörigen Höhen die 2900; 3600; 4176

Für rechtwinkliche Dreiecke entstehen, $\frac{1-\beta}{1+\beta}$ für α oder $\frac{1-\alpha}{1+\alpha}$ für β gesetzt, für die drei Seiten die Ausdrücke $(1+\alpha^2)^2$; $1-\alpha^4$; $2\alpha(1+\alpha^2)$ und für die zugehörigen Höhen die

$2\alpha(1-\alpha^2)$; $2\alpha(1+\alpha^2)$; $1-\alpha^4$; oder unter p und q ganze Zahlen gedacht, aber $p < q$ angenommen und $\frac{p}{q}$ für α gesetzt, für die drei Seiten, die ganze Zahlen liefernden Zahlbilder $(p^2+q^2)^2$; q^4-p^4; $2pq(q^2+p^2)$; und für die zugehörigen Höhen die

$$2pq(q^2-p^2);\quad 2pq(q^2+p^2);\quad q^4-p^4$$

z. B. $q=2$; $p=1$ gewählt, die Zahlen 25; 15; 20; 12; 20; 15.

33) Die Längen der drei Seiten eines Dreiecks sind 7, 8 und 10; die entsprechenden Höhen und den Inhalt dieses Dreiecks zu bestimmen.

R. $\frac{15\sqrt{55}}{14}$; $\frac{15\sqrt{55}}{16}$; $\frac{3\sqrt{55}}{4}$; $\frac{15\sqrt{55}}{4}$ oder:

7,94593...; 6,95269...; 5,56215...; 27,8107...

34) Es sollen auch die Halbmesser des umschriebenen, eingeschriebenen und der drei Kreise ermittelt werden, welche diese Seiten und die Verlängerungen der beiden andern tangentiren.

R. $\frac{112\sqrt{55}}{165}$; $\frac{3\sqrt{55}}{10}$; $\frac{3\sqrt{55}}{2}$; $\frac{5\sqrt{55}}{6}$; $\frac{15\sqrt{55}}{22}$ oder

5,03402; 2,22486; 11,1243; 6,18017; 5,0565

35) Welches Kreisausschnittesmittelpunkts-Winkel liefert für den Kreisausschnitt denselben Umfang welchen die ganze Peripherie hat?

R. $2(\pi-1) = 4{,}28318$ als Bogen-Winkel oder $245^0\ 24'\ 30''$...

36) Eine concentrische Ringfläche von der Breite b enthält den Flächenraum a^2; welches sind die Halbmesser?

R. $\frac{a^2}{2b\pi}+\frac{b}{2}$ und $\frac{a^2}{2b\pi}-\frac{b}{2}$

37) Ein Kreisabschnitt, dessen Mittelpunkts-Winkel $\frac{\pi}{3}$

oder 60 Grad ist, hat den Flächen-Inhalt a^2; den Halbmesser des zugehörigen Kreises zu bestimmen.

R. $2a\sqrt{\dfrac{3}{2\pi - 3\sqrt{3}}} = 3{,}3224 \cdot a$

38) Ein gleichschenkliches Dreieck hat 50 Fuß Umfang und 120 Quadrat-Fuß Inhalt. Die Grundlinie und die Schenkel zu bestimmen.

R. 16 und 17; oder auch
17,316 und 16,342

39) Die Seite des regulären Neunecks zu bestimmen.

R. Bezeichnet z das Verhältniß dieser Seite x zum Halbmesser r des ums Neuneck beschriebenen Kreises, so daß also $x = rz$ ist, so entsteht zur Bestimmung von z die Gleichung:

$z^3 - 3z + \sqrt{3} = 0$. Sucht man nun eine Wurzel dieser Gleichung durch die Methode der Grenzen, dann die beiden andern durch die entstehende quadratische Gleichung, so ergeben sich die drei Wurzeln für z

1,285 ...; 0,684 ... und — 1,969 und von diesen kann nur die mittlere der Aufgabe genügen, so daß also

$$x = 0{,}684 \ldots \cdot r \text{ ist.}$$

40) Zwei Punkte A und B liegen in den Entfernungen $AC = 10$ und $BD = 5$ von der Geraden CD in derselben Ebene; es ist $CD = 5 \cdot \sqrt{10}$ und es soll die Entfernung x des Punctes E zwischen C und D vom Punct D, bestimmt werden, für welche das Product der absoluten Zahlen, welche die Längen von AE und BE in der gewählten Einheit ausdrücken, gleich 100 wird.

R. Die Gleichung wird, geordnet:

$x^4 - 10\sqrt{10} \cdot x^3 + 375x^2 - 250 \cdot \sqrt{10} \cdot x - 1250 = 0$ und ihr entsprechen die reellen Wurzeln 4,1869 ... und — 1,0313 ..., so daß also zwei solche Puncte E existiren,

von welchen aber der letztere in der Verlängerung von CD liegt.

41) Zwei Kreise, den Halbmessern 4 und 2 angehörig, und eine Gerade liegen in einer Ebene; die Normalen aus den Mittelpuncten der erwähnten beiden Kreise auf diese Gerade sind 10 und 6 und der Abstand der Fußpuncte dieser Normalen ist 8. Die Mittelpuncte und Halbmesser der Kreise zu bestimmen, von welchen jeder die Gerade und die Peripherien der beiden gegebenen Kreise tangentirt.

R. Es giebt sechs solche Kreise und bezeichnet x die Entfernung vom Fußpunct der Normale 10 bis zum Berührungspunct der Geraden, in der Richtung nach dem Fußpunct der Normale 6 gemessen, und y den Halbmesser jedes dieser 6 Kreise, so entsteht:

1) wenn die gegebenen Kreise außerhalb des gesuchten liegen

$$x = \frac{4}{3}(14 - \sqrt{133}) \quad = 3{,}2899\ldots \text{ und}$$

$$y = \frac{1}{9}(215 - 16\sqrt{133}) = 3{,}3865\ldots; \text{ so wie auch}$$

$$x = \frac{4}{3}(14 + \sqrt{133}) \quad = 34{,}0434\ldots \text{ und}$$

$$y = \frac{1}{9}(215 + 16\sqrt{133}) = 44{,}3912\ldots$$

2) wenn sie innerhalb des gesuchten liegen

$$x = 24 - 2\sqrt{114} = 2{,}6459\ldots \text{ und}$$
$$y = 93 - 8\sqrt{114} = 7{,}5836\ldots; \text{ so wie auch}$$
$$x = 24 + 2\sqrt{114} = 45{,}3541\ldots \text{ und}$$
$$y = 93 + 8\sqrt{114} = 178{,}4164\ldots$$

3) wenn der eine innerhalb, der andere außerhalb liegt

$$x = \frac{2}{5}(28 - \sqrt{154}) = 6{,}2361\ldots \text{ und}$$

$y = \frac{1}{25}(209 - 8\sqrt{154}) = 4{,}3889\ldots$; so wie auch

$x = \frac{2}{5}(28 + \sqrt{154}) = 16{,}1638\ldots$ und

$y = \frac{1}{25}(209 + 8\sqrt{154}) = 12{,}3310\ldots$

42) Eine Höhe BD eines Dreiecks ABC treffe AC zwischen A und C in D; es sei $BD = 48$; $AD = 36$; $DC = 64$. In der Ebene dieses Dreiecks den Punct E zu bestimmen, für welchen sich die drei Entfernungen EA, EB, EC von den Eckpuncten A, B, C wie die diesen Eckpuncten gegenüber liegenden Seiten BC, AC, AB verhalten.

R. Trifft die Normale aus E auf AC diese Seite AC in F, so findet sich, daß E außerhalb des Dreiecks und zwar jenseits der Seite AC liegt, und daß $AF = 64$; $FE = 48$ ist. Es existirt in diesem speciellen Fall nur ein solcher Punct E und die Entfernungen EA, EB, EC ergeben sich eben so groß wie die Seiten BC, AC, AB.

43) Es bezeichnen a, b, c die Längen der drei Seiten eines Dreiecks; r den Halbmesser des um dasselbe, ϱ den des in dasselbe; α den des Kreises welcher a und die Verlängerungen von b und c; β den des Kreises welcher b und die Verlängerungen von a und c; und γ den desjenigen welcher c und die Verlängerungen von a und b berührt. Von diesen 5 Halbmessern r, ϱ, α, β, γ sind drei gegeben, und durch sie sollen die übrigen zwei, die 3 Seiten des Dreiecks und auch der Inhalt F desselben ausgedrückt werden.

R. I. Es entsteht, wenn r, ϱ und (einer der drei Halbmesser α, β, γ, etwa) α gegeben sind:

$a = \sqrt{[4r(\alpha - \varrho) - (\alpha - \varrho)^2]}$;

$$\left.\begin{matrix} b \\ c \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\left[(\alpha+\varrho)\sqrt{\left(\frac{4r}{\alpha-\varrho}-1\right)} \pm \sqrt{[4r(\alpha-\varrho)-(\alpha+\varrho)^2]}\right];$$

$$\left.\begin{matrix}\beta\\ \gamma\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\left[4r - (\alpha - \varrho) \pm \sqrt{\left([4r - (\alpha + \varrho)]^2 - \frac{16r\varrho^2}{\alpha - \varrho}\right)}\right];$$

$$F = \alpha\varrho\sqrt{\left(\frac{4r}{\alpha - \varrho} - 1\right)}$$

und die Grenze der Möglichkeit ist:

$$r \geqq \frac{(\alpha + \varrho)^2}{4(a - \varrho)}$$

II. Sind r, α und β gegeben, so folgt:

$$c = \sqrt{[4r(\alpha + \beta) - (\alpha + \beta)^2]};$$

$$\left.\begin{matrix}a\\ b\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\left[\sqrt{[4r(\alpha + \beta) - (\alpha - \beta)^2]} \pm (\alpha - \beta)\sqrt{\left(\frac{4r}{\alpha + \beta} - 1\right)}\right];$$

$$\gamma = \frac{1}{2}\left[4r - (\alpha + \beta) + \sqrt{\left([4r - (\alpha - \beta)]^2 - \frac{16r\beta^2}{\alpha + \beta}\right)}\right];$$

$$\varrho = \frac{1}{2}\left[-4r + \alpha + \beta + \sqrt{\left([4r - (\alpha - \beta)]^2 - \frac{16r\beta^2}{\alpha + \beta}\right)}\right];$$

$F = \alpha\beta\sqrt{\left(\frac{4r}{\alpha + \beta} - 1\right)}$; und die Grenz-Bedingung der Möglichkeit $r > \frac{\alpha + \beta}{4}$

III. Es ergiebt sich, wenn ϱ, α und β gegeben sind:

$$a = \frac{(\alpha - \varrho)\beta}{\sqrt{[\alpha\beta - (\alpha + \beta)\varrho]}}$$

$$b = \frac{(\beta - \varrho)\alpha}{\sqrt{[\alpha\beta - (\alpha + \beta)\varrho]}}$$

$$c = \frac{(\alpha + \beta)\varrho}{\sqrt{[\alpha\beta - (\alpha + \beta)\varrho]}}$$

$$\gamma = \frac{\alpha\beta\varrho}{\alpha\beta - (\alpha + \beta)\varrho}$$

$$r = \frac{(\alpha + \beta)(\alpha - \varrho)(\beta - \varrho)}{4[\alpha\beta - (\alpha + \beta)\varrho]}$$

$$F = \frac{\alpha\beta\varrho}{\sqrt{[\alpha\beta - (\alpha+\beta)\varrho]}}$$

und die Grenz-Bedingung ist $\varrho < \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$

IV. Für den letzten Fall, wenn α, β und γ gegeben sind, erhält man:

$$a = \frac{\alpha(\beta+\gamma)}{\sqrt{(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)}}$$

$$b = \frac{\beta(\alpha+\gamma)}{\sqrt{(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)}}$$

$$c = \frac{\gamma(\alpha+\beta)}{\sqrt{(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)}}$$

$$\varrho = \frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma};$$

$$r = \frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)(\beta+\gamma)}{4(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)}$$

$$F = \frac{\alpha\beta\gamma}{\sqrt{(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)}}$$

und keine Grenz-Bedingung.

44) Es sind die Längen a, b der nicht parallelen Seiten eines Trapezes, so wie die c, d seiner beiden Diagonalen gegeben; hiedurch die Längen x, y der parallelen Seiten auszudrücken.

R. $x^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{(a^2-c^2)^2 - (b^2-d^2)^2}{a^2+c^2-(b^2+d^2)}$

$$y^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{(a^2-d^2)^2 - (b^2-c^2)^2}{a^2+d^2-(b^2+c^2)}$$

45) Es ist ein rechter Winkel ABC und in dem Raum desselben ein Punct D gegeben, dessen Entfernung von AB $= 27$, von $BC = 8$ ist; durch diesen Punct eine Gerade in solcher Richtung zu legen, daß ihre Länge zwischen den Durchschnittspuncten mit den nöthigenfalls verlängerten Schenkeln des Winkels $ABC = 50$ wird.

R. Ist E der Durchschnittspunct mit dem Schenkel BC, so ergeben sich für BE die vier genügenden Zahlen

22,8823; 34,7199; 46,1282 und — 49,7304

46) Den Inhalt F eines Fünfecks $ABCDE$ durch die Inhalte a, b, c, d, e der fünf Eckdreiecke EAB, ABC, BCD, CDE und DEA dieses Fünfecks auszudrücken.

R. Es entsteht die Gleichung:

$$F^2 - (a+b+c+d+e)F + ab + bc + cd + de + ea = 0$$

(Siehe: Aufgelöste Aufgaben u. s. w. vom Verfasser. 1838. Leipzig. Volkmar. p. 172.)

47) Durch die drei Seiten $BC = a$; $AC = b$; $AB = c$ eines Dreiecks ABC auszudrücken: die drei Transversalen aus den Ecken A, B, C nach denjenigen Puncten D, E, F der gegenüberliegenden Seiten, in welchen dieselben im directen Verhältniß der beiden andern Seiten abgetheilt sind, die Theile derselben bis zum gemeinschaftlichen Durchschnittspunct G der drei Transversalen, so wie auch die Entfernungen dieses Punctes G von den drei Seiten, und die Theile in welche die Fußpuncte derselben diese Seiten eintheilen.

R. Bezeichnet S den Ausdruck $a+b+c$; A den $b+c-a$; B den $a+c-b$; C den $a+b-c$; F den Inhalt des Dreiecks, also den Ausdruck

$$\frac{1}{4}\sqrt{(ABCS)}, \text{ so findet man:}$$

$$AD = \frac{\sqrt{(bcAS)}}{b+c}; \quad BE = \frac{\sqrt{(acBS)}}{a+c};$$

$$CF = \frac{\sqrt{(abCS)}}{a+b}; \quad AG = \sqrt{\frac{bcA}{S}};$$

$$BG = \sqrt{\frac{acB}{S}}; \quad CG = \sqrt{\frac{abC}{S}};$$

$$GD = \frac{a}{b+c}\sqrt{\frac{bcA}{S}}; \quad GE = \frac{b}{a+c}\sqrt{\frac{acB}{S}};$$

$GF = \frac{c}{a+b} \cdot \sqrt{\frac{abC}{S}}$; die Entfernung des Punctes G von jeder der drei Seiten $= \frac{2F}{S}$; die Theile von $BC = a$, $\frac{B}{2}$ und $\frac{C}{2}$; von $CA = b$, $\frac{C}{2}$ und $\frac{A}{2}$; und die von $AB = c$, $\frac{A}{2}$ und $\frac{B}{2}$.

XI. Aufgaben aus der ebenen Trigonometrie.

1) Zu Bestimmung der fehlenden Abmessungen eines Dreiecks ist gegeben: die Summe a zweier Seiten, die dritte b und ein ihr anliegender Winkel α.

R. Die zweite, α anliegende Seite ist

$$= \frac{a^2 - b^2}{2(a - b\cos\alpha)}$$

2) Die Aufgabe bleibe, nur mit der Abweichung, daß α der der Seite b gegenüberliegende Winkel sei.

R. Die beiden andern Seiten, deren Summe $= a$ ist, ergeben sich

$$= \frac{1}{2}\left[a \pm \sqrt{\left(a^2 - (a^2 - b^2)\sec^2\frac{\alpha}{2}\right)}\right]$$

3) Die Differenz zweier Seiten eines Dreiecks sei $= 6$; die dritte Seite $= 15$; der von ihr und der größeren der beiden andern Seiten eingeschlossene Winkel $= \frac{\pi}{3}$. Wie groß ist die diesem Winkel gegenüber liegende Seite?

R. 57

4) Welches ist aber in dem Fall die größere der beiden Seiten, deren Differenz $= 6$ gegeben ist, wenn der Winkel $\frac{\pi}{3}$ ihr gegenüber liegen soll?

R. 13

5) Welche Werthe haben aber die beiden Seiten, wenn der Winkel $\frac{\pi}{3}$ der Seite 15 gegenüber liegen soll?

R. $3(\sqrt{22} \pm 1)$ d. h. 17,0712... und 11,0712...

6) Es sind zwei Winkel α, β eines Dreiecks (also auch der dritte γ) und die Summe a aller drei Seiten gegeben. Diese einzeln, so wie auch den Inhalt dieses Dreiecks durch a, α, β und γ auszudrücken.

R. Die den Winkeln α, β, γ gegenüber liegenden Seiten ergeben sich

$$\frac{a}{2} \sin \frac{\alpha}{2} \sec \frac{\beta}{2} \sec \frac{\gamma}{2}; \quad \frac{a}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sec \frac{\alpha}{2} \sec \frac{\gamma}{2};$$

$\frac{a}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \sec \frac{\alpha}{2} \sec \frac{\beta}{2}$ und der Inhalt

$$= \frac{a^2}{4} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$$

7) Durch die Summe a aller drei Seiten eines Dreiecks einen Winkel α desselben, und die Höhe b auf die α gegenüber liegende Seite, die drei Seiten einzeln auszudrücken.

R. Die α gegenüber liegende Seite ergiebt sich

$= \dfrac{a^2}{2(a + b \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2})}$ und für die beiden andern wird ihre

Summe $= \dfrac{a}{2} \cdot \dfrac{a \sin \frac{\alpha}{2} + 2b \cos \frac{\alpha}{2}}{a \sin \frac{\alpha}{2} + b \cos \frac{\alpha}{2}}$ und ihr Product

$$= \frac{a^2 b}{4\cos\frac{\alpha}{2}\left(a\sin\frac{\alpha}{2} + b\cos\frac{\alpha}{2}\right)}$$

wodurch dann beide Seiten bestimmt sind.

8) Die Summe aller 3 Seiten eines Dreiecks sei $= 100$; eine der Höhen desselben $= 30$ und einer der beiden ihr gegenüber liegenden Winkel $= 50^0$. Wie groß ist die Seite, welche der Höhe 30 als Grundlinie angehört?

R. 12,6004 . . .

9) Zu Bestimmung eines Dreiecks ist gegeben: das Product zweier Seiten $= a^2$; der eingeschlossene Winkel $= \alpha$ und die ihm gegenüber liegende Seite $= b$.

R. Die beiden andern Seiten sind:

$$\frac{1}{2}\left[\sqrt{\left(b^2 + 4a^2\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)} \pm \sqrt{\left(b^2 - 4a^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)}\right]$$

das Dreieck existirt also nur, wenn $b \geqq 2a\sin\frac{\alpha}{2}$ ist.

10) Zu Bestimmung eines Dreiecks ist gegeben: eine Seite $= a$; die ihr zugehörige Höhe $= b$ und der a gegenüber liegende Winkel $= \alpha$. Welches sind die beiden andern Seiten?

R. $\frac{1}{2}\left[\sqrt{\left(a^2 + 2ab\,\mathrm{cotg}\frac{\alpha}{2}\right)} \pm \sqrt{\left(a^2 - 2ab\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\right)}\right]$

das Dreieck existirt also nur, wenn $a \geqq 2b\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$ ist.

11) Es sind zwei Seiten eines Dreiecks gegeben, die eine $= 25$; die andere $= 22$; der von beiden eingeschlossene Winkel soll halb so groß sein, als der der Seite 25 gegenüber liegende. Welches ist der eingeschlossene Winkel?

R. $41^0\ 53'\ 39''$

12) Welches wird aber dann dieser Winkel sein, wenn der der Seite 22 gegenüber liegende die doppelte Größe haben soll?

R. $30^0\ 46'\ 38''$

13) In welchem Dreieck verhalten sich zwei Seiten wie 11 zu 9 und die ihnen gegenüber liegenden Winkel wie 3 zu 1?

R. Der Sinus des kleineren Winkels von beiden ergiebt sich $= \frac{2}{3}$; der des größeren $= \frac{22}{27}$ und diese Winkel sind demnach $41^\circ\ 48'\ 37''$ und $125^\circ\ 25'\ 51''$.

14) Zu Bestimmung der drei Winkel eines Dreiecks sei gegeben die Differenz $2\beta^\circ$ zweier derselben, und die Bedingung, daß die Transversale aus der Mitte der Seite, welcher diese Winkel anliegen, zur gegenüber liegenden Ecke des Dreiecks, den Winkel daselbst in zwei Theile theile, von welchen der $= 90^\circ$ werden soll, welcher in demjenigen der beiden entstandenen Dreiecken liegt, in dem der größere der beiden Winkel, deren Differenz $= 2\beta$ ist, sich befindet.

R. Drückt $2x$ die Summe der beiden Winkel aus, deren Differenz $= 2\beta$ ist, so entsteht $\operatorname{tg} x = \sqrt[3]{\operatorname{tg}\beta}$ und die drei Winkel sind $180 - 2x$; $x + \beta$; $x - \beta$.

Ist z. B. $\beta = 20^\circ$, so werden dieselben

$108^\circ\ 56'\ 52''$; $55^\circ\ 31'\ 34''$ und $15^\circ\ 31'\ 34''$

15) In einer der Seiten AB eines Dreiecks ABC sind zwei Puncte D, E durch die Entfernungen $AD = a$, $BE = b$ gegeben, doch $a + b < AB$ vorausgesetzt. Durch a, b und die drei Winkel $ACD = \alpha$; $DCE = \beta$; $ECB = \gamma$ die Entfernung $DE = x$ auszudrücken.

R. Bezeichnet c die Differenz

$\frac{ab \sin(\alpha + \beta) \sin(\beta + \gamma)}{\sin\alpha \sin\gamma} - ab$, so bestimmt sich

$$x = \frac{1}{2}\left(-a - b + \sqrt{[(a+b)^2 - 4c]}\right).$$

16) Der Inhalt eines gleichschenklichen Dreiecks sei $= 48$ Quadratfuß; sein Umfang $= 32$ Fuß. Welches ist die dritte Seite oder Grundlinie?

R. Bezeichnet $2x$ dieselbe, in Fußen verstanden, so bestimmt sich x aus der Gleichung $x^3 - 8x^2 + 72 = 0$. Wird diese reducirt, also $x = y + \frac{8}{3}$ gesetzt, so entsteht $y^3 - \frac{64}{3}y + \frac{920}{27} = 0$ und bezeichnet dann φ den Winkel für welchen $\cos\varphi = -\frac{115}{128}$ ist, so hat man $y = \frac{16}{3}\cos\frac{\varphi}{3}$; auch $= \frac{16}{3}\cos\frac{2\pi+\varphi}{3}$; so wie $= \frac{16}{3}\cos\frac{4\pi+\varphi}{3}$. Nur der erste und der dritte Werth genügen der Aufgabe und liefern $x = 6$ und auch $4{,}6055\ldots$

17) Dieselbe Aufgabe, wenn der Inhalt $= 60$ und der Umfang $= 36$ werden soll.

R. Es ergiebt sich für die Grundlinie sowohl 10 als auch $13{,}798\ldots$

18) In dem einen Schenkel eines Winkels β, dessen Spitze durch A bezeichnet sein soll, sind zwei Puncte B und C gegeben; die Entfernung desjenigen Punctes D im andern Schenkel von der Spitze A, der Bedingung entsprechend zu bestimmen, daß der Winkel BDC ein gegebener α werde.

R. Es liege B zwischen A und C; AC sei $= a$, $AB = b$ und $AD = x$ bezeichnet; drückt dann c den Quotienten $\frac{a\sin(\alpha+\beta) + b\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha}$ aus, so folgt

$$x = \frac{1}{2}[c \pm \sqrt{(c^2 - 4ab)}]$$

19) Welches ist der höchste Werth der in der vorigen Aufgabe für α stattfinden kann?

R. Derjenige, welcher für α aus

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{(a-b)\sin\beta}{2\sqrt{ab} - (a+b)\cos\beta}$$ sich bestimmt.

20) In Beziehung auf die beiden vorigen Aufgaben sei $a = 20$; $b = 10$; $\beta = 45^0$; den größten für α existirenden Werth und den zugehörigen für x, und dann auch für einen kleineren Werth von α den entsprechenden für x zu berechnen.

R. Der größte Werth für α ist 45^0, wozu $x = 10\sqrt{2} = 14{,}14$ gehört. Für $\alpha = 30^0$ wird x sowohl $= 25{,}162..$, als auch $= 7{,}792\ldots$

21) Zwei in einer Ebene liegende, excentrische, den Halbmessern r, ϱ und der Centrale a zugehörige Kreise schneiden sich; durch einen der Durchschnittspuncte eine Gerade so zu legen, daß die Theile derselben, welche Sehnen der beiden Kreise werden, gleiche Längen erhalten.

R. Bezeichnet x den Winkel welchen diese Gerade mit der Centrale a bildet, und α den, der Seite ϱ gegenüber liegenden im Dreieck, dessen Seiten a, r und ϱ sind, so entsteht

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{cotg} \alpha - \frac{a}{2r} \operatorname{cosec} \alpha$$

22) Zu Bestimmung eines Parallelogramms ist der Inhalt desselben $= a^2$, sein Umfang $= 2b$ und eine der beiden Diagonalen $= c$ gegeben.

R. Bezeichnet φ den der Diagonale c gegenüber liegenden Winkel des Parallelogramms, so ist $\operatorname{cotg} \frac{\varphi}{2} = \frac{b^2 - c^2}{2a^2}$ und die beiden Seiten x, y des Parallelogramms bestimmen sich dann aus den zwei Gleichungen $xy = a^2 \operatorname{cosec} \varphi$ und $x + y = b$.

23) Aus den vier Seiten a, b, c, d eines Vierecks, welches in einem Kreise liegt, die Winkel desselben zu bestimmen.

R. Bezeichnet φ den Winkel, welchen a und b einschließen, so ist $\sin^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{(c + d + a - b)(c + d + b - a)}{4(ab + cd)}$

24) Aus den vier Seiten a, b, c, d eines Vierecks und der Bedingung daß die von a und b und von c und d gebildeten Winkel einander gleich werden sollen, diese Winkel x zu bestimmen.

$$\text{R.}\quad \cos^2\frac{x}{2} = \frac{(a+b+c+d)(a+b-c-d)}{4(ab-cd)}$$

25) Für welche Werthe des der Cathete AB gegenüber liegenden Winkels α im, bei B rechtwinklichen Dreieck ABC existirt zwischen A und B ein Punct D, für welchen die Normale DE aus D auf die Hypotenuse AC, ein Dreieck ADE abschneidet, welches $= \frac{n}{m}$ des ganzen Dreiecks ABC ist?

R. Für alle die Werthe von α, für welche $\sin\alpha$ größer ist wie $\sqrt{\frac{n}{m}}$

26) Zwei Personen befinden sich in einer Horizontallinie, die eine in A, die andere in B, und sehen zwischen sich in der Vertical-Ebene durch die Horizontale AB einen höher stehenden lothrechten Gegenstand CD unter demselben Winkel α; die Lothrechte CD treffe verlängert die Horizontale AB in E und es sei $AE = a$, $BE = b$ gegeben; durch α, a und b auszudrücken: die Höhe $CD = z$, die $DE = w$, so wie die Winkel x, y welche die Gesichtslinien AD, BD nach dem Fußpunct D der Lothrechten CD mit der Horizontalen AB bilden.

R. Es entsteht die Gleichung

$$[1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}(x+y)][1 - \operatorname{tg}x \cdot \operatorname{tg}y] = 0$$

welcher Genüge geschieht für $\operatorname{tg}x \cdot \operatorname{tg}y = 1$, woraus aber Werthe hervorgehen, welche der einen Bedingungsgleichung $a\operatorname{tg}(\alpha+x) = b\operatorname{tg}(\alpha+y)$ nur genügen, wenn $a = b$ ist. Für verschiedene Werthe von a und b, wie sie vorauszusetzen sind, genügt nur $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}(x+y) = 1$, woraus, wenn

Bayerische Staatsbibliothek MÜNCHEN

$+\sqrt{[(a+b)^2 \operatorname{tg}^2 \alpha + 4ab]}$ durch c ausgedrückt wird,

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{2a}[c - (a+b)\operatorname{tg}\alpha];$$

$$\operatorname{tg} y = \frac{1}{2b}[c - (a+b)\operatorname{tg}\alpha];$$

$$w = \frac{1}{2}[c - (a+b)\operatorname{tg}\alpha] \text{ und}$$

$$z = (a+b)\operatorname{tg}\alpha \text{ folgt.}$$

27) In Beziehung auf Nr. 26 sei $\alpha = 45^0$; $a = 30$; $b = 20$; welche Werthe werden dann x, y, w und z haben?

R. $w = 10$; $z = 50$; $\operatorname{tg} x = \frac{1}{3}$; $\operatorname{tg} y = \frac{1}{2}$; also $x = 18^0\ 26'\ 6''$; $y = 26^0\ 33'\ 54''$.

28) Zu Bestimmung eines Vierecks sind zwei aufeinander folgende Seiten $= a$, b, der eingeschlossene Winkel $= \gamma$ und die beiden Winkel α, β gegeben, welche, von der Diagonale und den Seiten gebildet, in der γ gegenüber liegenden Ecke den Seiten a, b gegenüber liegen.

R. Bezeichnet x den der erwähnten Diagonale gegenüber liegenden Winkel in dem Dreieck zum Winkel β und der Seite b, so ergiebt sich

$$\operatorname{cotg} x = -\operatorname{cotg}(\alpha+\beta+\gamma) - \frac{b \sin\alpha}{a \sin\beta \cdot \sin(\alpha+\beta+\gamma)}$$

29) In der Peripherie eines Kreises zum Mittelpunct M und Halbmesser r sind zwei Puncte A und B gegeben und an ihnen zwei sich schneidende Tangenten gelegt; den Punct D zwischen A und B in der Peripherie zu bestimmen, für welchen die Tangente an demselben bis zu ihren Durchschnittspuncten mit den zwei gegebenen Tangenten verlängert, die bestimmte Länge a erhält.

R. Bezeichnet 2α den Mittelpunctswinkel AMB; 2φ den gesuchten AMD, so entsteht zur Bestimmung von φ, mag 2α kleiner oder größer wie 180^0 oder π sein, die

Bestimmungsgleichung $r \operatorname{tg} \varphi + r \operatorname{tg}(\alpha - \varphi) = a$, woraus $\operatorname{tg} \varphi = \frac{a}{2r} \pm \frac{1}{2r} \sqrt{(4ar \operatorname{cotg} \alpha + a^2 - 4r^2)}$ folgt. Ist nun $2\alpha < \pi$, also $\operatorname{cotg} \alpha$ positiv, so ist der kleinste für a festzusetzende Werth $2r \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, der höchste $r \operatorname{tg} \alpha$; ist aber $2\alpha > \pi$, also $\operatorname{cotg} \alpha$ negativ, so kann a jeden Werth haben, von $2r \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ an bis unendlich groß.

30) Ein Winkel eines Dreiecks sei 45°; die Normale aus seiner Spitze auf die gegenüber liegende Seite trifft dieselbe zwischen ihren Endpuncten, und theilt sie im Verhältniß wie 2 zu 3. Welches sind die diesen Theilen gegenüber liegenden Theile des Winkels von 45°?

R. 18° 26′ 6″ und 26° 33′ 54″

31) Ein Winkel eines Dreiecks sei 32°; die Normale aus seiner Spitze auf die Richtung der gegenüber liegenden Seite trifft dieselbe in ihrer Verlängerung, und diese abgeschnittene Länge ist der dritte Theil der gegenüber liegenden Seite. Den, diesem Theil der Verlängerung gegenüber liegenden Winkel an der Spitze zu berechnen.

R. Er ist 42° 59′ 5″ oder auch 15° 0′ 55″

32) Der Halbmesser eines Kreises sei $= r$; mit welchem Halbmesser x muß in ihm ein concentrischer Kreis gebildet werden, damit zwischen beider Peripherien eine bestimmte, durch n ausgedrückte, Anzahl von Kreisen, welche beide Peripherien und sich der Folge nach unter einander berühren, gebildet werden kann?

R. $x = r \cdot \operatorname{tg}^2 \left(\frac{n-2}{n} \cdot \frac{\pi}{4} \right)$

33) Zwei Quadranten in derselben Ebene den Mittelpuncten A und B zugehörig und beide von demselben Halbmesser r, berühren sich außerhalb im Punct C so, daß A,

C und B in eine Gerade fallen; die Endpuncte D, E der beiden andern begrenzenden Halbmesser AD, BE sind durch die Gerade DE verbunden. In dem von der Geraden DE und den beiden Quadranten DC, CE eingeschlossenen Raum sollen Kreise bestimmt werden, von welchen der erste DE und beide Quadranten, jeder folgende aber den vorhergehenden Kreis und ebenfalls beide Quadranten berührt. Wie viel solche Kreise existiren, welches ist der Durchmesser des $n$ten derselben, und welchen spitzen Winkel φ bildet, wenn M sein Mittelpunct ist, sowohl AM als BM mit ACB?

R. Die Anzahl ist unendlich groß; der Durchmesser des $n$ten Kreises ist $= \frac{r}{n(n+1)}$ und $\operatorname{tg}\varphi = \frac{2n+1}{2n(n+1)}$

Die Summe aller Durchmesser, d. h. $\sum\left[\frac{r}{n(n+1)}\right]$ muß $= r$ sein, wodurch also geometrisch dargethan ist, daß die Summe aller Glieder der harmonischen Reihe

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \ldots + \textit{in inf.}$$

die Zahl 1 liefert.

34) Es ist ein Kreis zum Mittelpunct M und Halbmesser r und in seiner Ebene sind zwei Puncte A, B durch ihre Entfernungen $MA = a$, $MB = b$ und den Winkel $AMB = \alpha$ gegeben. Den Halbmesser x des Kreises zu bestimmen, dessen Peripherie durch A und B geht und die des gegebenen Kreises in den beiden Durchschnittspuncten halbirt.

R. Bezeichnet φ den Winkel welchen a, und $\alpha + \varphi$ den, welchen b mit dem halbirenden Durchmesser einschließt, so wird

$$\operatorname{cotg}\varphi = \frac{r^2 - b^2}{r^2 - a^2} \cdot \frac{a}{b} \operatorname{cosec}\alpha - \operatorname{cotg}\alpha$$

und ist hieraus φ bestimmt, so folgt dann

$$x^2 = r^2 + \left(\frac{r^2 - a^2}{2a \sin\varphi}\right)^2$$

35) Durch die vier Seiten a, b, c, d und den Winkel α welchen die Diagonalen bilden, den Inhalt des Vierecks auszudrücken.

R. Liegt α den Seiten a und c gegenüber, so ergiebt sich der Inhalt =

$$\frac{1}{4}(b^2 + d^2 - a^2 - c^2) \cdot \operatorname{tg}\alpha$$

Ist $\alpha = \frac{\pi}{2}$, so ist die Aufgabe unbestimmt, weil außer α dann nur noch 3 Bestimmungsstücke festgesetzt sind, indem $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ wird, also nur 3 der vier Seiten beliebig gewählt werden können.

36) In einem Kreisausschnitt zum Halbmesser r und Mittelpuncts-Bogen-Winkel 2α den Halbmesser des die 3 Begrenzungslinien berührenden Kreises zu bestimmen.

R. Er ist $= \dfrac{\sin\alpha}{\cos^2\dfrac{\pi - 2\alpha}{4}} \cdot \dfrac{r}{2}$ (vergleiche X. 5)

37) Es ist ein Winkel 2α eines Dreiecks, die Summe a der ihn einschließenden Seiten, und die Differenz d der Theile der dritten Seite gegeben, in welche sie durch die Normale aus der Winkelspitze von 2α auf dieselbe abgetheilt wird. Das Dreieck zu bestimmen.

R. Bezeichnet φ denjenigen der beiden übrigen Winkel des Dreiecks, welcher dem größeren der beiden Theile, deren Differenz $= d$ ist, anliegt, so bestimmt sich φ aus $\cos(\alpha + \varphi) = \dfrac{d\cos\alpha}{a}$ und dann folgen auch leicht die übrigen Abmessungen.

38) Es ist ein Winkel α eines Dreiecks und die beiden Theile a, b der gegenüber liegenden Seite gegeben, welche die Normale aus der Winkelspitze von α auf dieselbe abschneidet. Das Dreieck zu bestimmen.

R. Bezeichnet φ die Differenz der Theile, in welche α durch die Normale getheilt wird, so entsteht

$\sin\varphi = \frac{a-b}{a+b}\sin\alpha$ und ist hieraus φ bestimmt, so folgen dann leicht die übrigen Abmessungen.

39) Es bezeichne A die Spitze eines Winkels $= \alpha$; diesen der Bedingung entsprechend in zwei Theile φ und $\alpha - \varphi$ zu theilen, daß für jeden Punct D der Theilungslinie, wenn aus ihm die Normalen DB, DC auf die gemeinschaftlichen Schenkel AB von α und $\alpha - \varphi$ und AC von α und φ gefällt werden und B mit C durch eine Gerade verbunden wird, sich der Inhalt des Dreiecks ABC zu dem von BDC wie m zu n verhält.

R. Aus $\cos(2\varphi - \alpha) = \frac{m+n}{m-n}\cos\alpha$ bestimmt sich φ; doch entspringen nur in den Fällen mögliche Resultate, wenn $\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} \geqq \frac{n}{m}$ festgesetzt ist.

40) Es sind die drei Höhen a, b, c eines Dreiecks gegeben; die Winkel desselben zu bestimmen.

R. Bezeichnet φ den Winkel, welchem b und c gegenüber liegen, so ist

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2a}\sqrt{\left[\frac{(bc+ab-ac)(bc+ac-ab)}{bc}\right]}$$

41) Es ist ein Winkel α eines Dreiecks, und die Halbmesser r, ϱ der Kreise um und in dies Dreieck beschrieben, gegeben; die Seiten und Winkel desselben zu bestimmen.

R. Bezeichnet φ einen der beiden andern Winkel und x die Seite, an welcher α und φ anliegen, so entsteht

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \varphi\right) = \frac{\varrho}{2r}\operatorname{cosec}\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2};$$

$$x = 2r\sin(\alpha + \varphi)$$

42) Durch eine Seite a eines Dreiecks und die Halbmesser r, ϱ der um und in dies Dreieck beschriebenen Kreise das übrige zu bestimmen.

R. Drückt φ den a gegenüber liegenden, ψ einen der beiden anliegenden Winkel aus, so ist $\sin\varphi = \frac{2r}{a}$ und

$\sin\left(\frac{\varphi}{2}+\psi\right) = \frac{2\varrho}{a}\cos\frac{\varphi}{2} + \sin\frac{\varphi}{2}$ oder auch, wenn zuvor der Winkel α aus $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\varrho}{a}$ berechnet ist,

$$\sin\left(\frac{\varphi}{2}+\psi\right) = \sin\left(\frac{\varphi}{2}+\alpha\right)\sec\alpha$$

43) Durch den Inhalt a^2, den Umfang b und einen Winkel α eines Dreiecks die drei Seiten einzeln zu bestimmen.

R. Es ergiebt sich die dem Winkel α gegenüber liegende Seite $= \frac{1}{2b}\left(b^2 - 4a^2\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}\right)$ und für die beiden anliegenden entsteht ihre Summe $= \frac{1}{2b}\left(b^2 + 4a^2\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}\right)$

und ihre Differenz $= \pm\sqrt{\left[\left(\frac{b^2+4a^2\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}}{2b}\right)^2 - \frac{8a^2}{\sin\alpha}\right]}$

44) Welches ist in der vorigen Aufgabe, wenn b und α festgesetzt sind, der größtmöglichste Werth für den zu erzeugenden Inhalt a^2, und welches sind die Seiten dieses Dreiecks?

R. Aus der Formel für die dem Winkel α gegenüber liegende Seite erhellet, daß a^2 den Werth $\frac{b^2}{4}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ nie erreichen kann, und wird dem Ausdruck für die Differenz der beiden anliegenden Seiten die Form

$$\frac{2\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}}{b}\sqrt{\left[\left(\frac{b^2}{4}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\pi+\alpha}{4}-a^2\right)\left(\frac{b^2}{4}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{cotg}^2\frac{\pi+\alpha}{4}-a^2\right)\right]}$$

gegeben, so ist unterm Wurzelzeichen der erste Factor für jeden möglichen Werth von a^2 allemal positiv, und hieraus und aus der Betrachtung des zweiten Factors folgt dann, daß der höchste Werth vom Inhalt $= \frac{b^2}{4} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{cotg}^2 \frac{\pi + \alpha}{4}$ ist, daß dieses Dreieck gleichschenklich,

jeder Schenkel $= \frac{b}{4} \operatorname{cosec}^2 \frac{\pi + \alpha}{4}$ und

die Grundlinie $= \frac{b}{2} \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{cosec}^2 \frac{\pi + \alpha}{4}$ wird.

45) Es sei, in Beziehung auf 43, der Inhalt a^2 und der Winkel α festgesetzt angenommen; man verlangt den kleinsten Werth für b und die Abmessungen dieses Dreiecks, welches mit dem kleinsten Umfang bei einem bestimmten Winkel einen festgesetzten Inhalt a^2 einschließt.

R. Es ergiebt sich daß das Dreieck gleichschenklich, sein kleinster Umfang $= 2a \operatorname{tg} \frac{\pi + \alpha}{4} \cdot \sqrt{\operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2}}$; jeder Schenkel $= a \operatorname{cosec} \frac{\pi + \alpha}{2} \cdot \sqrt{\operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2}}$ und die dritte Seite $= a \operatorname{cosec} \frac{\pi + \alpha}{2} \sqrt{(2 \sin \alpha)}$ ist.

46) Es sei in 44) $b = 100$; $\alpha = 40^\circ$; den größten Inhalt des zu bildenden Dreiecks und seine Abmessungen zu berechnen.

R. Der größte zu erzeugende Inhalt des entstehenden gleichschenklichen Dreiecks wird $= 446{,}128$; jeder Schenkel $= 37{,}25727\ldots$ und die Grundlinie nahe $= 25{,}48547$

47) Es sei in 45) $a^2 = 100$; $\alpha = 40$. Den kleinsten Umfang des entstehenden gleichschenklichen Dreiecks und die Abmessungen desselben zu berechnen.

R. Umfang $= 47{,}34457\ldots$; jeder Schenkel $= 17{,}63929\ldots$; Grundlinie $= 12{,}06599\ldots$

48) In den vier Seiten AB, BC, CD und DA eines Parallelogramms $ABCD$ sind die Puncte E, F, G, H gegeben, die in die gegenüber liegenden Seiten fallenden durch die Geraden EG, FH verbunden und ihr Schneidungspunct durch K bezeichnet. Durch die Seiten $AB = DC = a$; $AD = BC = b$, den von beiden eingeschlossenen Winkel α und die Orte der Puncte E, F, G, H die Inhalte der vier Vierecke $AEKH$, $EBFK$, $FCGK$ und $GDHK$ auszudrücken.

R. Bezeichnen n, m, p, q ächte Brüche und ist $AE = na$; $BF = mb$; $DG = pa$; $AH = qb$; wird der Inhalt von $ABCD$, also $ab \sin \alpha$ durch ${}_2P$ ausgedrückt und das Zahlbild

$$\frac{1}{q-m} \cdot \left[q^2 + \frac{[q(1-n)+nm]^2}{(q-m)(n-p)-1}\right]$$ unter t verstanden, so ergiebt sich:

$AEKH = t \cdot P$;

$EBFK = (m + q - t)P$;

$FCGK = (2 + t - n - m - p - q)P$ und

$GDHK = (n + p - t)P$

49) Das Zahlen-Verhältniß der Inhalte der vier Vierecke in 48) für den Fall zu ermitteln, wenn $n = \frac{1}{3}$; $m = \frac{1}{3}$; $p = \frac{3}{4}$; $q = \frac{1}{2}$ ist.

R. 362; 408; 439; 639

50) Ein Dreieck hat 450 Quadrat-Fuß Inhalt, der Halbmesser des um dieses Dreieck beschriebenen Kreises ist 25 Fuß und der des eingeschriebenen Kreises = 8 Fuß. Welches sind die Maaße der Seiten dieses Dreiecks?

R. Es existirt nur ein solches Dreieck und die Seiten desselben sind:

49,4009...; 40,7385...; 22,3596...

51) Ein Dreieck hat 110 Fuß Umfang und die Halbmesser der um und eingeschriebenen Kreise sind 25 und 8 Fuß. Welches sind die Seiten?

R. 24,6387...; 36,6949...; 48,6664...

52) Es sind die Entfernungen a, b, c eines innerhalb eines Dreiecks ABC liegenden Punctes D von den Eckpuncten A, B, C und die Verlängerungen α, β von a und b bis zu den Durchschnittspuncten E, F mit den gegenüber liegenden Seiten BC, AC gegeben; durch diese fünf Längen auszudrücken: den Winkel $ADF = x$; den $CDF = y$; die Verlängerung z von c zwischen D und dem Durchschnittspunct mit AB, und den Inhalt w des Dreiecks ABC.

R. Wird $a\alpha(b+\beta)$ durch A; $b\beta(a+\alpha)$ durch B; $c(ab-\alpha\beta)$ durch C und $(A+B+C)(A+B-C)(A+C-B)(B+C-A)$ durch P^2 ausgedrückt, so folgt:

$$\sin x = \frac{P}{2AB};\quad \cos x = \frac{A^2+B^2-C^2}{2AB};$$

$$\sin y = \frac{P}{2BC};\quad \cos y = \frac{B^2+C^2-A^2}{2BC};$$

$$z = \frac{abC}{Ab+aB};\quad w = \frac{cP}{4\alpha\beta C}$$

53) In Beziehung auf die vorige Aufgabe sei $a = 10$; $b = 4$; $c = 30$; $\alpha = 6$; $\beta = 5$; die Seiten dieses Dreiecks zu berechnen.

R. $AB = 13,651\ldots$; $BC = 28,142\ldots$; $AC = 38,949\ldots$

54) Es ist bestimmt, daß der Winkel, welchen die, eine Seite eines Dreiecks halbirende Transversale mit einer der beiden andern Seiten bildet, $= \alpha$ und die halbe Differenz der beiden Winkel, welche der halbirten Seite anliegen, $= \beta$ werden soll. Die Winkel dieses Dreiecks zu ermitteln.

R. Bezeichnet $x+\beta$ denjenigen Winkel des Dreiecks, welcher mit α auf derselben Seite der Transversale liegt, wird $\operatorname{tg}\alpha$ durch a, $\operatorname{tg}\beta$ durch b und $\sin^2 x$ durch y ausgedrückt, so entsteht aus der Bedingungs-Gleichung

$$\sin\alpha\sin(x-\beta)=\sin(x+\beta)\sin(2x+\alpha)$$

die geordnete Gleichung

$$[(a+b)^2+(1-ab)^2]y^3-[2b^2(1+a^2)+(1-ab)^2]y^2$$
$$+b[b(1+a^2)-2a(1-ab)]y-a^2b^2=0$$

Anmerkung. Aus der Bedingungs-Gleichung folgt, wenn $\alpha=90^0$ ist, $\operatorname{tg}^3 x=\operatorname{tg}\beta$; vgl. 14.

55) In Beziehung auf 54) sei $a=\frac{1}{2}$; $b=\frac{1}{3}$. Welches sind die Winkel des Dreiecks?

R. Ziemlich genau: $85^0\,20'$; $48^0\,28'$ und der durch die Transversale getheilte $46^0\,12'$.

56) Es sind die drei Transversalen gegeben, welche die Winkel eines Dreiecks halbiren, aber vorausgesetzt, daß zwei derselben einander gleich sind. Durch beide Längen das Dreieck zu bestimmen.

R. Bezeichnet a die Länge der einen, b die jeder der beiden andern Transversalen und $2x$ die von jeder derselben halbirten Winkel, so folgt aus der Bedingungs-Gleichung

$$2a\cos 2x=b\sin 3x$$

die geordnete Gleichung

$$\sin^3 x-\frac{a}{b}\sin^2 x-\frac{3}{4}\sin x+\frac{a}{2b}=0$$

also, $y+\frac{a}{3b}$ für $\sin x$ gesetzt, die

$$y^3-\frac{4a^2+9b^2}{12b^2}y-\frac{8a^3-27ab^2}{4\cdot 27b^3}=0$$

für welche, weil

$$\left(\frac{8a^3-27ab^2}{8\cdot 27b^3}\right)^2-\left(\frac{4a^2+9b^2}{36b^2}\right)^3=-\frac{32a^4+9a^2b^2+27b^4}{1728b^4},$$

also allemal negativ ist, der irreductible Fall eintritt, daher, unter φ^0 den Winkel verstanden, für welchen

$$\cos\varphi = \frac{8a^3 - 27ab^2}{(4a^2 + 9b^2)^{\frac{3}{2}}}$$ ist, sich

$$\sin x = \frac{1}{3b}\left[a + \sqrt{(4a^2 + 9b^2)} \cdot \begin{Bmatrix} \cos\frac{\varphi}{3} \\ \cos(120 + \frac{\varphi}{3}) \\ \cos(240 + \frac{\varphi}{3}) \end{Bmatrix}\right]$$

ergiebt.

Anmerkung. Die Lösung dieser Aufgabe, wenn alle drei Transversalen verschieden sind, führt auf eine Gleichung von sehr hohem Grad. Der synthetische Beweis, daß, wenn 2 der 3 Transversalen einander gleich sind, dann das Dreieck gleichschenklich sein muß, kann auf folgende Weise geführt werden: Ist ABC das Dreieck, 2α der von der Transversale AD halbirte Winkel in A; 2β der von der Transversale BE in B halbirte Winkel, so folgt aus der Voraussetzung $AD = BE$ und aus der Annahme α oder $DAE > \beta$, daß, F zwischen B und E gedacht, $DAF = \beta$ genommen werden könnte, also die vier Puncte A, F, D, B in der Peripherie desselben Kreises liegen müßten, woraus, weil $\alpha + \gamma > 2\beta$, aber zugleich $\alpha + \gamma < \frac{\pi}{2}$ ist, $BF > AD$, daher um so mehr $BE > AD$ hervorgeht, welches der Voraussetzung widerspricht, so daß also α nicht größer wie β sein kann. Eben so ist der Beweis daß β nicht größer wie α sein kann; und demnach muß $\alpha = \beta$ sein, wenn $AD = BE$ ist.

57) In Beziehung auf 56) sei $a = b$. Welches ist der Werth von x?

R. Die cubische Gleichung nimmt in diesem Fall leicht die Form an

$$(2\sin x - 1)(2\sin^2 x - \sin x - 2) = 0$$

und ihr genügt sowohl $\sin x = \frac{1}{2}$ als auch $\sin x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{4}$; nur zum ersten Resultat existirt ein Dreieck, und zwar das gleichseitige.

58) In Beziehung auf 56) sei $b = 2a$; welches ist der Werth von x?

R. In diesem Fall geht aus der Bedingungs-Gleichung sogleich $\cos 2x = \sin 3x$, also $2x + 3x = 90^0$, folglich $x = 18^0$ hervor.

59) In Beziehung auf 56) sei $2b = a$; welches ist der Werth von x?

R. Es ergeben sich 3 Werthe für $\sin x$, nämlich: 2,1317709; — 0,7539525... und 0,6217456...; nur der letzte kann der Aufgabe genügen und giebt $x = 38^0\ 26'\ 37''$

60) Welches gleichschenkliche Dreieck hat die Eigenschaft, daß die Normalen aus dem Mittelpunct der dritten Seite auf die beiden Schenkel dasselbe in drei gleiche Theile abtheilen?

R. Dasjenige, dessen von den beiden Schenkeln eingeschlossener Winkel $= 109^0\ 28'\ 16''$ ist.

61) In einem bei B rechtwinklichen Dreieck ABC ist der Winkel $ACB = 30^0$; innerhalb dieses Dreiecks den Punct P zu bestimmen, für welchen die 3 Normalen PD, PE, PF auf die 3 Seiten AB, BC und die Hypotenuse AC das Dreieck in 3 gleiche Theile theilen.

R. Wird CB gleich der doppelten Längen-Einheit, also $= 2$; dann $CE = 1 + x$ und also $EB = 1 - x$ gesetzt, und zuletzt $3x$ durch z ausgedrückt, so folgt die Gleichung $z^4 - 38z^2 + 96z - 39 = 0$ und von ihren vier reellen Wurzeln genügt der Aufgabe nur die $z = 0{,}5073...$, so daß also $x = 0{,}1691...$ annähernd ist.

62) Auf den Schenkeln eines Winkels $= 2\alpha$, für welchen $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ ist, sind von der Spitze B aus die Längen $BA = 10$, $BC = 5$ abgetragen, und in derselben Ebene aus B mit dem Halbmesser 2 ein Kreis beschrieben. In

der Peripherie desselben die Puncte D zu bestimmen, für welche die Winkel, welche DA und DC mit der Tangente in D bilden, einander gleich werden.

R. Für den Winkel ABD, von BA nach BC hin abgetragen, ergeben sich aus einer Gleichung vom vierten Grad folgende vier Werthe: $41^\circ\, 24'\, 9''$; $214^\circ\, 5'\, 50''$; $112^\circ\, 2'\, 39''$ und $319^\circ\, 58'\, 10''$. Für die ersten beiden hiedurch bestimmten Puncte halbirt der verlängerte Halbmesser BD den Winkel ADC; für die letzten beiden aber die Tangente in D.

63) In einem Viereck $ABCD$ bildet die eine Diagonale AC mit den Seiten des Vierecks die vier Winkel $CAB = \alpha$; $ACB = \beta$; $ACD = \gamma$; $CAD = \delta$. Durch sie die Winkel zu bestimmen, welche die andere Diagonale BD mit den vier Seiten bildet.

R. $\operatorname{cotg} BDC = \dfrac{\sin\delta \sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha \sin(\beta+\gamma) \sin(\gamma+\delta)} - \operatorname{cotg}(\beta+\gamma)$;

$$\operatorname{cotg} BDA = \frac{\sin\gamma \sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta \sin(\alpha+\delta) \sin(\gamma+\delta)} - \operatorname{cotg}(\alpha+\delta)$$

64) Zwei gegenüber liegende Seiten eines Vierecks haben die Längen 10 und 12; die beiden Diagonalen desselben die 14 und 16, und der den gegebenen Seiten gegenüber liegende Winkel beider Diagonalen ist 60°. Welche Längen haben die beiden andern Seiten des Vierecks?

R. 21,0598 .... und 4,9462 ...; oder auch
6,0036 ... und 20,7835 ...

65) Zwei gegenüber liegende Seiten eines Vierecks und eine Diagonale desselben haben dieselbe Länge a; die Winkel der Ecken, durch welche diese Diagonale geht, sind $= \alpha$ und β. Wie drücken sich die beiden übrigen Seiten dieses Vierecks durch a, α, β aus?

R. Die, welche α anliegt, ist $= -2a\cos\dfrac{\alpha+2\beta}{3}$

und die, welche β anliegt, $= -2a\cos\frac{2\alpha+\beta}{3}$; wonach so ein Viereck nur existirt, wenn sowohl $\alpha+2\beta$ als auch $2\alpha+\beta$ größer wie 270° ist.

66) Es ist eine Gerade AB und einerseits derselben in den beiden Endpuncten A und B als Ecken die beiden hohlen Winkel $BAD=\alpha$ und $ABC=\beta$ gegeben. In einem gegebenen Punct P in AB zwischen A und B die Spitze eines hohlen Winkels γ so anzulegen daß wenn die Durchschnittspuncte E, G der Schenkel desselben mit AD und BC durch die Gerade EG verbunden werden, das entstehende Dreieck PEG einen gegebenen Inhalt F erhalte.

R. Wird AP durch a; PB durch b; der zu bestimmende Winkel APE durch φ bezeichnet, so daß der Winkel $APG=\varphi+\gamma$ wird, so bestimmen sich, wenn Werthe für φ existiren, dieselben aus

$$\cos(\alpha-\beta+\gamma+2\varphi)=\cos(\alpha+\beta-\gamma)-\frac{ab\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{F}$$

Bemerkung. Der kleinste für F zu wählende Werth ist $=\frac{1}{2}ab\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\sec^2\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}$

67) Die Aufgabe bleibe die vorige, nur mit der Bestimmung, daß $\alpha+\beta<\pi$ sei und die Durchschnittspuncte E, G beide jenseits des Durchschnittspunctes der Geraden AD, BC fallen sollen.

R. Bezeichnet φ ebenfalls den Winkel APE, also $\varphi-\gamma$ den APG, so sind, wenn Werthe für φ existiren, dieselben aus

$$\cos(\alpha-\beta-\gamma+2\varphi)=\cos(\alpha+\beta+\gamma)-\frac{ab\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{F}$$

zu entnehmen.

Bemerkung. Der kleinste für F existirende Werth ist $=\frac{1}{2}ab\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\cdot\sec^2\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$

68) Es ist ein Winkel von 60 Graden gegeben; das Verhältniß x der von der Spitze aus auf beiden Schenkeln abzutragenden Längen der Bedingung entsprechend zu bestimmen, daß die Summe ihrer Cubi dem Cubus der geraden Verbindungslinie ihrer Endpuncte gleich werde.

R. Es entsteht die reciproke Gleichung

$$x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1 = 0$$

welche nur die beiden imaginären Wurzeln $\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ hat, so daß die Lösung im geometrischen Sinn nicht möglich ist.

XII. Aufgaben aus der Körperlehre und sphärischen Trigonometrie.

1) Durch den Inhalt eines Cubus die Größe jeder seiner Diagonalen auszudrücken.

R. Bezeichnet K den Inhalt, so ist jede Diagonale $= \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{K}$.

2) Ein normales Parallelepipedum hat ein Quadrat zur Grundebene und 48 Cubic-Fuß Inhalt bei 90 Quadrat-Fuß Oberfläche. Welches sind seine Abmessungen?

R. Bezeichnet x die Anzahl Fuße der Seite jenes Quadrats und y die Höhe des Körpers, so kann $x = 2{,}4669\ldots$ und $y = 7{,}8874\ldots$; so wie auch $x = 5{,}1254$ und $y = 1{,}8272\ldots$ sein.

3) Ein normaler Cylinder hat a Cubic-Fuß Inhalt und sein Mantel enthält b Quadrat-Fuß Fläche. Wie drücken sich seine Abmessungen durch a und b aus?

R. Der Halbmesser seiner Grundebenen ist $= \frac{2a}{b}$ und seine Höhe $= \frac{b^2}{4a\pi}$

4) Ein normaler Cylinder hat 60 Cubic-Fuß Inhalt und 100 Quadrat-Fuß Begränzungsfläche. Wie viele Fuße x enthält der Halbmesser seiner Grundebenen und wie viele y die Höhe?

R. Es tritt bei der entstehenden cubischen Gleichung

$$x^3 - \frac{50}{\pi}x + \frac{60}{\pi} = 0$$

der irreductible Fall ein, und entsteht

$$x = 2\cos\frac{2n\pi + \varphi}{3}\cdot\sqrt{\frac{50}{3\pi}}$$ für $n=0$, 1 und 2 oder -1,

wenn $\cos\varphi = -1{,}8\cdot\sqrt{\frac{3\pi}{50}}$ ist. Nur zwei der 3 Resultate genügen der Aufgabe und geben $x = 3{,}1339\ldots$, wozu $y = 1{,}9446\ldots$; so wie auch $x = 1{,}357\ldots$, wozu $y = 10{,}3715\ldots$ gehört.

5) Ein Parallelepipedum, dessen vier Seitenkanten normal auf den Grund-Ebenen stehen, wird durch eine Ebene, welche alle diese 4 Kanten zwischen ihren Endpuncten durchschneidet, in zwei abgekürzte vierseitige Prismen getheilt. Durch den Inhalt F der Grundebene und dreie von den vier Seitenkanten eines der beiden abgekürzten Prismen, die Länge x der vierten und den Inhalt K desselben zu bestimmen.

R. Bezeichnet a die Länge der x gegenüber liegenden Seitenkante; b, c die der beiden andern; so folgt

$$x = b + c - a$$ und

$$K = (2a + b + c)\cdot\frac{F}{2}$$

6) In der Entfernung h begrenzen zwei rechtwinkliche Parallelogramme von den Abmessungen a, b; und a^1, b^1, so daß a mit a^1 und b mit b^1 parallel läuft, als Grundebenen einen Körper (z. B. das Blatt eines Blattzapfens), dessen Seiten-Ebenen im Allgemeinen als Trapeze erscheinen. Welches ist der Inhalt dieses Obelisk?

R. Er ist $= \frac{h}{6}(2ab + 2a'b' + ab' + a'b)$

7) Von einem normalen Cylinder wird durch eine Ebene welche von einem Durchmesser der einen Grundebene ausgeht, ein hufförmiger Körper abgeschnitten. Den Inhalt desselben so wie seine gewölbte Oberfläche zu bestimmen.

R. Bezeichnet r den Halbmesser der Grundebene, h die Höhe des Hufs, d. h. den Theil der Seite des Cylinders, welcher dem begrenzenden Durchmesser gegenüber durch die trennende Ebene abgeschnitten wird, so wird die gewölbte Oberfläche $= 2rh$ und der Inhalt des Hufs $= \frac{2}{3}r^2h$

8) Die größere Grundebene einer parallel abgekürzten Pyramide hat den Inhalt a^2; die kleinere den b^2; die Entfernung beider von einander sei $= h$. Die Ergänzungshöhe zu bestimmen.

R. Sie ist $= \frac{bh}{a-b}$

9) Die Grundebene einer Pyramide habe den Inhalt a^2; die Höhe derselben sei h; parallel mit der Grundebene, in der Entfernung c von einander, haben zwei Durchschnitts-Ebenen, zusammen addirt, den Inhalt b^2. Wie groß ist der Inhalt jeder einzelnen und wie weit steht jede von der Spitze der Pyramide ab?

R. Wird der absolute Werth von $\sqrt{(2b^2h^2 - a^2c^2)}$ durch p ausgedrückt, so findet sich

der Inhalt der größeren $= \frac{1}{2}b^2 + \frac{acp}{2h^2}$

und ihre Entfernung von der Spitze $= \frac{c}{2} + \frac{p}{2a}$

der der kleineren $= \frac{1}{2}b^2 - \frac{acp}{2h^2}$

und ihre Entfernung $= -\frac{c}{2} + \frac{p}{2a}$

Die Grenze der Möglichkeit ist $bh > ac$

10) Eine parallel abgekürzte Pyramide durch eine mit den Grundebenen parallele Ebene im Verhältniß wie n zu $m - n$ abzutheilen.

R. Bezeichnet a^2 den Inhalt der größeren, b^2 den der kleineren Grundebene; h die Höhe der ganzen abgekürzten Pyramide; liegt die Theilungsebene in der Entfernung x von b^2 und soll dieser Theil von der Höhe x der Verhältnißzahl n entsprechen, so entsteht für den Inhalt der theilenden Ebene

$$\left[b^3 + \frac{n}{m}(a^3 - b^3)\right]^{\frac{2}{3}} \text{ und}$$

$$x = \frac{h}{a-b}\left[-b + \left(b^3 + \frac{n}{m}(a^3 - b^3)\right)^{\frac{1}{3}}\right]$$

11) Durch die sechs Kanten einer dreiseitigen Pyramide die Längen der drei Geraden auszudrücken, welche die Mittelpuncte gegenüber liegender Kanten verbinden.

R. Bezeichnen a, b, c die 3 Kanten von einer der vier begrenzenden Ebenen; α, β, γ die der Kanten, welche a, b, c gegenüber liegen; und A, B, C die zu bestimmenden Längen der 3 Transversalen, welche a, α; b, β; c, γ halbiren, so wird

$$4A^2 = b^2 + c^2 - a^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2;$$
$$4B^2 = a^2 + c^2 - b^2 + \alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2;$$
$$4C^2 = a^2 + b^2 - c^2 + \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2;$$

woraus auch noch $A^2 + B^2 + C^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{4}$ folgt.

12) Den Kreis zum Halbmesser r in zwei Kreisausschnitte, den Winkeln φ und $2\pi - \varphi$ angehörig, der Bedingung entsprechend einzutheilen, daß ersterer in einen Kreis

umgeformt, die Grundebene, letzterer den zugehörigen Mantel eines Kegels abgiebt.

R. Der Halbmesser der Grundebene wird $= \frac{-1+\sqrt{5}}{2} r$ (Seite des regulären Zehnecks) und $\varphi = (3 - \sqrt{5})\pi$, wozu $137^\circ\ 30'\ 28''$ gehören.

13) Ein normaler Kegel soll 40 Cubic-Fuß Inhalt und 100 Quadrat-Fuß als Fläche des Mantels erhalten. Welche Abmessungen sind erforderlich?

R. Für den Halbmesser x der Grundebene entsteht die Gleichung $x^6 - \left(\frac{100}{\pi}\right)^2 \cdot x^2 + \left(\frac{120}{\pi}\right)^2 = 0$

und hieraus, $\cos\varphi = 0{,}0216\pi \cdot \sqrt{3}$ gesetzt, wozu $\varphi = 96^\circ\ 45'$ sehr nahe paßt,

$$x^2 = \frac{200}{\pi\sqrt{3}} \cos \frac{2n\pi + \varphi}{3} \text{ für } n = 0;\ 1;\ 2$$

Der Aufgabe entspricht nur $x = 5{,}57539\ldots$; wozu die Höhe des Kegels $= 1{,}2288\ldots$ und $x = 1{,}20125\ldots$; wozu die Höhe $26{,}4706$ gehört.

14) Ein normaler Kegel hat den Inhalt a^3 und seine gesammte Begränzungsfläche ist $= b^2$. Den Halbmesser x seiner Grundebene und seine Höhe y durch a und b auszudrücken.

R. $$x = \sqrt{\left[\frac{b^3 \pm \sqrt{(b^6 - 72\pi a^6)}}{4\pi b}\right]}$$

$$y = \frac{b}{6\pi a^3}\left[b^3 \mp \sqrt{(b^6 - 72\pi a^6)}\right]$$

Der Kegel existirt nur, wenn b^6 größer, mindestens gleich ist $72\pi a^6$.

15) Die Abmessungen des in einen normalen Kegel eingeschriebenen Cylinders der Bedingung gemäß zu bestimmen, daß sich sein Inhalt zu dem des Kegels wie p zu 1 verhält.

R. Drückt z das Verhältniß des Halbmessers der Grundebene des Cylinders zu dem der Grundebene des Kegels aus, so ergiebt sich die Gleichung

$z^3 - z^2 + \frac{p}{3} = 0$; oder, $y + \frac{1}{3}$ für z gesetzt, die reducirte $y^3 - \frac{1}{3}y + \frac{9p-2}{27} = 0$. Ist nun $\left(\frac{9p-2}{2 \cdot 27}\right)^2 = \left(\frac{1}{9}\right)^3$, also $p = \frac{4}{9}$, so wird $y = \frac{1}{3}$, also $z = \frac{2}{3}$; ist $p > \frac{4}{9}$, so findet die Cardanische Formel Anwendung; da in diesem Fall aber nur ein reeller Werth entstehen könnte, und doch in die Augen fällt, daß in allen möglichen Fällen, den des Maximums ausgenommen, immer zwei solche Cylinder sich ergeben müssen, so kann man schließen, daß $p = \frac{4}{9}$ dies Maximum giebt, also der größte Werth ist, der für p gewählt werden kann. Für jeden kleineren tritt dann der irreductible Fall ein und giebt, $\cos\varphi = 1 - \frac{9p}{2}$ gesetzt,

$z = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cos\frac{2n\pi + \varphi}{3}$ für $n = 0$; 1; und 2 und von diesen drei reellen Werthen muß immer einer negativ ausfallen, kann also der Aufgabe nicht genügen.

16) In einen normalen Kegel soll ein anderer, dessen Spitze mit dem Mittelpunct der Grundebene desselben zusammenfällt, eingeschrieben werden, dessen Inhalt sich zu dem des umschließenden Kegels wie p zu 1 verhält. Beider Abmessungen zu vergleichen.

R. Der größte Werth von p ergiebt sich $= \frac{4}{27}$ und für jeden kleineren Werth von p wird, $\cos\varphi = 1 - \frac{27}{2}p$

gesetzt, das Verhältniß der Halbmesser der Grundebenen des eingeschriebenen Kegels zum umschließenden

$$= \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cos \frac{2n\pi + \varphi}{3} \text{ für } n = 0;\ 1;\ 2$$

woraus aber nur zwei der Aufgabe entsprechende Werthe folgen.

17) Die Abmessungen des in einen normalen Kegel zu beschreibenden Cylinders der Bedingung entsprechend zu bestimmen, daß sich der Inhalt seines Mantels zu dem des Kegels wie p zu 1 verhält.

R. Bezeichnet r den Halbmesser der Grundebene des Kegels, h seine Höhe, b seine Seite, also den Ausdruck $+ \sqrt{(r^2 + h^2)}$; x den Halbmesser der Grundebene, y die Höhe des verlangten eingeschriebenen Cylinders, so entsteht

$$\frac{x}{r} = \frac{h \pm \sqrt{(h^2 - 2pbh)}}{2h}$$

$$y = \frac{h \mp \sqrt{(h^2 - 2pbh)}}{2}$$

und der höchste für p zu wählende Werth ist $= \frac{h}{2b}$

18) Dieselbe Aufgabe, nur soll die gesammte Begrenzungsfläche des Cylinders sich zur gesammten Begrenzungsfläche des Kegels wie p zu 1 verhalten.

R. Bei derselben Bezeichnung wie in 17) entsteht

$$x = \frac{r}{2(h-r)} \left[h \pm \sqrt{\left(h^2 - 2p(h-r)(b+r)\right)} \right]$$

$$y = \frac{h}{2(h-r)} \left[h - 2r \mp \sqrt{\left(h^2 - 2p(h-r)(b+r)\right)} \right]$$

Ist nun

a) $h < r$, so wird

$$x = \frac{r}{2(r-h)} \left[-h + \sqrt{\left(h^2 + 2p(r-h)(b+r)\right)} \right]$$

$$y = \frac{h}{2(r-h)}\left[2r-h-\sqrt{\left(h^2+2p(r-h)(b+r)\right)}\right]$$

Es existirt nur ein solcher Cylinder und p muß kleiner als $\frac{2r}{b+r}$ gewählt sein.

b) $h=r$, so wird $x=p\cdot\frac{r+b}{2}$; $y=r-p\cdot\frac{r+b}{2}$ und die Grenze für p bleibt wie in a).

c) $h>r$, aber $<2r$, so bleiben die allgemeinen Formeln, jedoch in der für x die Wurzel negativ, in der für y aber positiv genommen.

Es existirt also auch nur ein solcher Cylinder, und nur dann, wenn $p<\frac{2r}{b+r}$ genommen wird.

d) $h=2r$, so wird $x=r-\sqrt{\left[r^2-\frac{pr(r+b)}{2}\right]}$;

$y=2\sqrt{\left[r^2-\frac{pr(r+b)}{2}\right]}$ und die Grenze der Möglichkeit bleibt die bisherige. Ist endlich

e) $h>2r$, so bleiben die allgemeinen zweideutigen Ausdrücke für x und y; es ergeben sich zwei genügende Cylinder, doch nur, wenn $p>\frac{2r}{b+r}$ und zugleich auch kleiner wie $\frac{b-r}{2(h-r)}$ festgesetzt wird.

Für alle Werthe von p kleiner als $\frac{2r}{b+r}$ müssen die untern Zeichen genommen werden, so daß nur ein Cylinder existirt. Für $p=\frac{b-r}{2(h-r)}$ wird x $=\frac{rh}{2(h-r)}$; $y=\frac{h(h-2r)}{2(h-r)}$; für $p>\frac{b-r}{2(h-r)}$ werden x und y imaginär.

19) Das Verhältniß der Calotte und Kreis-Ebene, welche einen Kugel-Abschnitt begrenzen, sei wie p zu 1. Wie drückt sich die Höhe x des Kugel-Abschnitts durch p und den Durchmesser d der Kugel aus?

$$\text{R.}\quad x = \frac{p-1}{p}\cdot d$$

20) Das Verhältniß der Calotte und des Kegel-Mantels, welche einen Kugel-Ausschnitt begrenzen, sei $= p$. Der Durchmesser der zugehörigen Kugel $= d$. Die Höhe x der Calotte zu bestimmen.

$$\text{R.}\quad x = \frac{p^2}{4+p^2}\cdot d$$

21) Die gesammte Begrenzungsfläche eines Kugelabschnitts sei $= a^2$. Wie drückt sich die Höhe x desselben durch a und den Durchmesser d der Kugel aus?

$$\text{R.}\quad x = d - \sqrt{\left(d^2 - \frac{a^2}{\pi}\right)}$$

22) Die gesammte Begrenzungsfläche eines Kugelausschnitts sei a^2, der Halbmesser der Kugel $= r$. Welches ist die Höhe x der entsprechenden Calotte?

$$\text{R.}\quad x = \frac{1}{5r\pi}\left[r^2\pi + 2a^2 - \sqrt{(r^4\pi^2 + 4a^2r^2\pi - a^4)}\right]$$

23) Der Inhalt eines Kugelabschnitts sei a^3, der Halbmesser der Kugel $= r$. Welches ist die Höhe x dieses Kugelabschnitts?

R. Wird φ aus $\cos\varphi = 1 - \dfrac{3a^3}{2\pi r^3}$ bestimmt, so folgt $x = r\left(1 + 2\cos\dfrac{2n\pi + \varphi}{3}\right)$ oder bequemer

$x = 4r\cos\dfrac{(2n+1)\pi+\varphi}{6}\cos\dfrac{(2n-1)\pi+\varphi}{6}$; für $n = 0$, 1 und 2 oder -1

24) Welches ist der Flächen-Inhalt einer Zone, wenn die Höhe derselben $= 3$ und die Halbmesser der begrenzenden Peripherien 12 und 10 sind?

R. $\pi \cdot \sqrt{6409}$

25) Eine körperliche Zone ist durch einen abgekürzten Kegel von denselben Abmessungen ausgehöhlt und der Inhalt des bleibenden Hohlkörpers $= a^3$. Durch a und die Differenz d der Halbmesser beider die Zone begrenzenden parallelen Kreisebenen die Höhe x dieser Zone auszudrücken.

$$\text{R.}\quad x = \sqrt[3]{\left[\frac{3a^3}{\pi} + \sqrt{\left(\left(\frac{3a^3}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{d^2}{3}\right)^3\right)}\right]}$$
$$+ \sqrt[3]{\left[\frac{3a^3}{\pi} - \sqrt{\left(\left(\frac{3a^3}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{d^2}{3}\right)^3\right)}\right]}$$

26) Von einer körperlichen Zone, deren Höhe $= 6$ ist, und deren begrenzende parallele Kreis-Ebenen den Halbmessern 12 und 4 angehören, soll von der größeren Grund-Ebene herein, parallel mit derselben, der dritte Theil abgeschnitten werden. Seine Höhe x zu bestimmen.

R. Unter φ den Winkel verstanden, für welchen $\cos\varphi = -\frac{107}{29^{\frac{3}{2}}}$ ist, wozu $\varphi = 133^\circ\ 14'\ 51''$ gehört, entstehen für x die 3 Ausdrücke:

$-4 + 4\sqrt{29}\cos\ 44^\circ\ 24'\ 57''$;

$-4 + 4\sqrt{29}\cos 164^\circ\ 24'\ 57''$ und

$-4 + 4\sqrt{29}\cos 284^\circ\ 24'\ 57''$,

von welchen nur der letzte dieser Aufgabe entspricht, und das Resultat 1,36272 liefert.

27) Die Abmessungen desjenigen in einer Kugel beschriebenen Cylinders zu bestimmen, dessen Inhalt sich zu dem der Kugel wie p zu 1 verhält.

R. Das Verhältniß der Höhe des Cylinders zum Durchmesser der Kugel ergiebt sich

$= \frac{2}{\sqrt{3}} \cos \frac{2n\pi + \varphi}{3}$, wenn $\cos\varphi = -p\sqrt{3}$ ist. Der größte Werth den p haben kann, ist $\frac{1}{\sqrt{3}}$

28) Die Abmessungen desjenigen in einer Kugel beschriebenen normalen Kegels zu bestimmen, dessen Mantel sich zur Kugelfläche wie p zu 1 verhält.

R. Das Verhältniß der Höhe des Kegels zum Durchmesser der Kugel wird

$$= \frac{4}{3} \cos \frac{(2n+1)\pi + \varphi}{6} \cos \frac{(2n-1)\pi + \varphi}{6}$$

für $\cos\varphi = 1 - \frac{27}{2}p^2$ (vergl. 23) und der größte Werth von p ist $\sqrt{\frac{4}{27}}$

29) Die Abmessungen desjenigen normalen Kegels von gegebenem Inhalt a^3 zu bestimmen, für welchen die in denselben beschriebene Kugel den festgesetzten Inhalt b^3 besitzt.

R. Bezeichnet x den Halbmesser seiner Grundebene, y die Höhe dieses Kegels, so folgt

$$x^2 = \frac{a}{4\pi b}\left[a^2 \cdot \sqrt[3]{36\pi} \pm \sqrt[6]{48\pi} \cdot \sqrt{\left(3a(a^3 - 2b^3)\right)}\right]$$

woraus, wenn $2b^3 < a^3$ ist, immer zwei der Aufgabe genügende Werthe für x hervorgehen. Die zugehörigen für y sind $\frac{3a^3}{\pi x^2}$

30) Unter allen normalen Kegeln von einerlei Inhalt a^3 die Abmessungen desjenigen zu ermitteln, in welchem die Kugel vom größten Inhalt beschrieben werden kann.

R. Aus 29) folgt bei derselben Bezeichnung

$$b^3 = \frac{1}{2}a^3 \text{ und hierzu}$$

$x = a \cdot \sqrt[6]{\frac{9}{8\pi^2}}$; $y = a\sqrt[3]{\frac{24}{\pi}}$; also, wie leicht folgt:

Inhalt der Kugel : Inhalt des Kegels $= 1 : 2$
Oberfläche der Kugel : Kegel-Mantel $= 2 : 3$
Oberfläche der Kugel : Grundfläche des Kegels $= 2 : 1$
Oberfläche der Kugel : Begrenzungsfläche des Kegels
$= 1 : 2$
Seite des Kegels : Durchmesser seiner Grundebene
$= 3 : 2$

31) Die Größe x des Halbmessers der Grundebene eines normalen Cylinders der Bedingung entsprechend zu bestimmen, daß wenn derselbe eine Kugel zum Halbmesser r centrisch gänzlich durchbohrt, die Höhlung sich zum Inhalt der vollen Kugel wie p zu 1 verhält.

R. $x = r \cdot \sqrt{[1 - (1-p)^{\frac{2}{3}}]}$

32) Welchen Winkel φ muß die Achse eines Kegels mit jeder seiner Seiten bilden, damit, wenn durch denselben eine Kugel centrisch durchbohrt wird, bis die Spitze des Kegels die gegenüber liegende Kugelfläche berührt, der entstehende Hohlkörper $= \frac{1}{p}$ der vollen Kugel wird?

R. $\sec\varphi = \sqrt[4]{p}$

33) Es durchbohre der Kegel die Kugel noch weiter bis die Spitze des Kegels vom Mittelpunct der Kugel zum Halbmesser r in der Entfernung $a (> r)$ liegt. Welches ist der Inhalt des bleibenden Hohlkörpers?

R. $\frac{4}{3}\pi \cos\varphi (r^2 - a^2 \sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}$

34) Wenn aber $a < r$ ist, so daß die Spitze des Kegels innerhalb der Kugel bleibt, welches ist dann der Inhalt der Höhlung?

R. $\frac{1}{3}\pi[2r^3 + 3ar^2\sin^2\varphi + a^3\sin^2\varphi\cos 2\varphi - 2\cos\varphi(r^2 - a^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}]$

in welchem Ausdruck a negativ zu nehmen ist, wenn die Spitze des Kegels den Mittelpunct der Kugel nicht erreicht.

35) Welche Relation muß in 33) zwischen a und φ statt finden, wenn der innerhalb der Kugel befindliche abgekürzte Kegel-Mantel der $p$te Theil der von der Kugel-Fläche verbleibenden Zone werden soll?

R. $a \sin\varphi = \frac{r}{p}$

36) Durch die Längen der sechs Kanten einer dreiseitigen Pyramide den körperlichen Inhalt derselben auszudrücken.

R. Bei derselben Bedeutung der Zeichen wie in 11) wenn außerdem noch $(abc)^2 + (a\beta\gamma)^2 + (b\alpha\gamma)^2 + (c\alpha\beta)^2$ durch D^6 ausgedrückt wird, ergiebt sich der verlangte Inhalt

$$= \frac{1}{12}\sqrt{\left[(2a\alpha A)^2 + (2b\beta B)^2 + (2c\gamma C)^2 - D^6\right]}$$

37) Es sind die drei Seiten-Winkel a, b, c einer dreikantigen körperlichen Ecke gegeben. Die Lage der Transversale aus dem Eckpunct der Bedingung entsprechend zu bestimmen, daß dieselbe mit den drei Ebenen a, b, c gleiche Winkel φ bildet. Diesen Winkel φ, so wie auch die drei Winkel α, β, γ welche diese Transversale und die Kanten bc, ac, ab einschließen, durch a, b und c auszudrücken.

R. Es entsteht:

$$\operatorname{cosec}^2\varphi = 1 + \frac{\sin\frac{a+b+c}{2}}{\sin\frac{a+b-c}{2}\cdot\sin\frac{a+c-b}{2}\cdot\sin\frac{b+c-a}{2}};$$

$$\operatorname{cosec}^2\alpha = \frac{\sin\frac{a+b-c}{2}\,\sin\frac{a+c-b}{2}}{\sin b\sin c} + \frac{\sin\frac{a+b+c}{2}}{\sin b\sin c\cdot\sin\frac{b+c-a}{2}};$$

$$\operatorname{cosec}^2\beta = \frac{\sin\frac{b+c-a}{2}\,\sin\frac{b+a-c}{2}}{\sin a\sin c} + \frac{\sin\frac{a+b+c}{2}}{\sin a\sin c\sin\frac{a+c-b}{2}};$$

$$\operatorname{cosec}^2\gamma = \frac{\sin\frac{c+a-b}{2}\sin\frac{c+b-a}{2}}{\sin a \sin b} + \frac{\sin\frac{a+b+c}{2}}{\sin a \sin b \cdot \sin\frac{a+b-c}{2}}$$

38) Es sind die drei Seiten-Winkel a, b, c einer dreikantigen körperlichen Ecke gegeben. Die Lage der Transversale aus dem Eckpunct zu bestimmen, welche mit den drei Kanten ab, ac, bc denselben Winkel ψ bildet.

R. Es ergiebt sich $\operatorname{cotg}\psi =$

$$\frac{\sqrt{\left(\sin\frac{a+b+c}{2}\cdot\sin\frac{a+b-c}{2}\cdot\sin\frac{a+c-b}{2}\cdot\sin\frac{b+c-a}{2}\right)}}{2\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}}$$

39) Durch die Länge a jeder Kante eines regulären Körpers, die Anzahl n der denselben begrenzenden regulären Vielecke, die Anzahl m der Seiten jedes dieser Vielecke und die Anzahl p der Kanten jeder Ecke auszudrücken: die Begrenzungsfläche F und den körperlichen Inhalt K dieses regulären Körpers, den Halbmesser der umschriebenen und den ϱ der eingeschriebenen Kugel.

R. $F = \frac{nma^2}{4}\operatorname{cotg}\frac{\pi}{m}$

$$K = \frac{nma^3}{24}\cdot\frac{\operatorname{cotg}^2\frac{\pi}{m}\cos\frac{\pi}{p}}{\sqrt{\left[-\cos\left(\frac{\pi}{m}+\frac{\pi}{p}\right)\cos\left(\frac{\pi}{m}-\frac{\pi}{p}\right)\right]}}$$

$$r = \frac{a}{2}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{p}}{\sqrt{\left[-\cos\left(\frac{\pi}{m}+\frac{\pi}{p}\right)\cos\left(\frac{\pi}{m}-\frac{\pi}{p}\right)\right]}}$$

$$\varrho = \frac{a}{2}\cdot\frac{\operatorname{cotg}\frac{\pi}{m}\cos\frac{\pi}{p}}{\sqrt{\left[-\cos\left(\frac{\pi}{m}+\frac{\pi}{p}\right)\cos\left(\frac{\pi}{m}-\frac{\pi}{p}\right)\right]}}$$

(Vergleiche: die reine Mathematik und die mechanischen Wissenschaften vom Verf. Berlin 1845, bei Duncker u. Humblot pag. 152).

40) In Beziehung auf 39) durch n, m, p und r auszudrücken: a, F, K und ϱ.

$$\text{A.}\quad a = \frac{2\sqrt{\left[-\cos\left(\frac{\pi}{m}+\frac{\pi}{p}\right)\cos\left(\frac{\pi}{m}-\frac{\pi}{p}\right)\right]}}{\sin\frac{\pi}{p}}\cdot r$$

$$F = -nmr^2\cdot\operatorname{cotg}\frac{\pi}{m}\operatorname{cosec}^2\frac{\pi}{p}\cos\left(\frac{\pi}{m}+\frac{\pi}{p}\right)\cos\left(\frac{\pi}{m}-\frac{\pi}{p}\right)$$

$$K = -\frac{nmr^3}{3}\operatorname{cotg}^2\frac{\pi}{m}\operatorname{cosec}^2\frac{\pi}{p}\operatorname{cotg}\frac{\pi}{p}\cos\left(\frac{\pi}{m}+\frac{\pi}{p}\right)\cos\left(\frac{\pi}{m}-\frac{\pi}{p}\right)$$

$$\varrho = r\operatorname{cotg}\frac{\pi}{m}\operatorname{cotg}\frac{\pi}{p}$$

41) In Beziehung auf 39) durch n, m, p und ϱ auszudrücken: a, F, K und r.

$$\text{A.}\quad a = 2\varrho\operatorname{tg}\frac{\pi}{m}\sec\frac{\pi}{p}\sqrt{\left[-\cos\left(\frac{\pi}{m}+\frac{\pi}{p}\right)\cos\left(\frac{\pi}{m}-\frac{\pi}{p}\right)\right]}$$

$$F = -nm\varrho^2\operatorname{tg}\frac{\pi}{m}\sec^2\frac{\pi}{p}\cos\left(\frac{\pi}{m}+\frac{\pi}{p}\right)\cos\left(\frac{\pi}{m}-\frac{\pi}{p}\right)$$

$$K = -\frac{nm\varrho^3}{3}\operatorname{tg}\frac{\pi}{m}\sec^3\frac{\pi}{p}\cos\left(\frac{\pi}{m}+\frac{\pi}{p}\right)\cos\left(\frac{\pi}{m}-\frac{\pi}{p}\right)$$

$$r = \varrho\operatorname{tg}\frac{\pi}{m}\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{p}$$

42) Die geographische Lage von Berlin ist ziemlich genau 31° Länge und $52\frac{1}{2}$° nördlicher Breite, die von Constantinopel aber $46\frac{1}{2}$° Länge und 41° nördlicher Breite. Wie weit ist Berlin von Constantinopel auf der Erdkugel entfernt, wenn der mittlere Halbmesser derselben zu 860 Meilen angenommen wird?

A. Nahe 234 Meilen.

43) In einen normalen Kegel einen andern normalen Kegel zu legen, dessen Spitze mit dem Mittelpunct der Grundebene und dessen Peripherie seiner Grundebene mit dem Mantel des ersteren zusammenfällt, der Bedingung entsprechend daß sich der Mantel des eingeschriebenen zu dem des ursprünglichen wie n zu m verhält.

A. Bezeichnet α den Winkel, welchen jede Seite des ursprünglichen Kegels mit seiner Grundebene, $\varphi + \alpha - \frac{\pi}{2}$

den, welchen jede Seite des eingeschriebenen Kegels mit der gemeinschaftlichen Achse bildet, und b den Ausdruck $\frac{m}{n}\sin^2\alpha\cos\alpha$, so entsteht die Gleichung

$$\sin^2\varphi + b\cos(\alpha+\varphi) = 0$$

oder, nach $\sin\varphi$ geordnet, die

$$\sin^4\varphi - 2b\sin\alpha\sin^3\varphi + b^2\sin^2\varphi - b^2\cos^2\alpha = 0$$

Zu $\alpha = 60^0$ und $\frac{n}{m} = \frac{1}{8}$ genügt nahe $\varphi = 36^0\ 54'$ als einziger der Aufgabe entsprechende Werth.

44) Durch den Scheitelpunct A einer Calotte sind unter dem hohlen Winkel α zwei größte Kreisebenen gelegt, deren Peripherien die Peripherie der die Calotte begrenzenden Kreisebene in B und C schneiden; es soll eine Kreisebene bestimmt werden, deren Peripherie die drei Bogen AB, AC und BC des gleichschenklichen sphärischen Dreiecks ABC berührt.

R. Ist D der Mittelpunct der die Calotte begrenzenden Kreisebene, E der der zugehörigen Kugel, so daß also $BDC = \alpha$ ist und A, D, E in eine Gerade fallen, und bezeichnet β den Winkel $AEC = AEB$; ist ferner F der Berührungspunct der verlangten Peripherie mit dem Bogen BC, also $BF = FC$, und K der Ort im größten Kreisbogen AF durch welchen die Peripherie des berührenden Kreises geht, so bestimmt sich dieser Punct K durch

$$\operatorname{tg}\frac{AEK}{2} = \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi-\alpha}{4} : \operatorname{tg}\frac{\pi+\alpha}{4}$$

45) Eine Calotte zum Scheitelpunct A wird durch n größte Kreisebenen, welche sich in der Höhe derselben unter gleichen Winkeln α schneiden, in n vollkommen gleiche sphärische gleichschenkliche Dreiecke zerlegt; es sollen die Orte von Parallelkreisen zum Pol A der Bedingung entsprechend bestimmt werden, daß durch sie und erstere n Kreisbogen die Calotte (sphärische Kuppel) in lauter sphärische Vierecke

(Casetten) eingetheilt wird, in welchen berührende Kreise existiren.

R. Bezeichnen K_1 K_2 K_3 u. s. w., von der Grund-Ebene zum Scheitel hin gezählt, die Orte dieser Parallelkreise, und x_1 x_2 $x_3 \ldots$ die Winkel AEK_1 AEK_2 $AEK_3 \ldots$ (vergleiche die vorige Aufgabe), ferner p den Quotienten $\mathrm{tg}\frac{n-2}{4n}\pi : \mathrm{tg}\frac{n+2}{4n}\pi$, so ergiebt sich, die Bedeutung von β aus der vorigen Aufgabe beibehalten,

$$\mathrm{tg}\frac{x_1}{2} = p \cdot \mathrm{tg}\frac{\beta}{2}; \quad \mathrm{tg}\frac{x_2}{2} = p^2 \cdot \mathrm{tg}\frac{\beta}{2};$$

$$\mathrm{tg}\frac{x_3}{2} = p^3 \cdot \mathrm{tg}\frac{\beta}{2} \text{ u. s. w.}$$

46) In Beziehung auf die vorige Aufgabe sei $n = 30$, $\beta = \frac{1}{2}\pi$, also die Kuppel eine Halbkugel-Fläche, die Zahlenwerthe der Winkel x_1, x_2, x_3 u. s. w. zu berechnen.

R. In diesem Fall ist $\mathrm{tg}\frac{\beta}{2} = 1$; $p = \mathrm{tg}\,42^0 : \mathrm{tg}\,48^0$ und es ergeben sich die Winkel x_1 x_2 x_3 u. s. w. nach der Folge $= 78^0\ 3'\ 55''$; $66^0\ 37'\ 55''$; $56^0\ 6'\ 14''$; $46^0\ 43'\ 48''$; $38^0\ 36'\ 19''$; $31^0\ 42'\ 15''$; $25^0\ 55'\ 40''$; $21^0\ 9'\ 37''$; $17^0\ 12'\ 31''$; $13^0\ 59'\ 15''$ u. s. w.

XIII. Aufgaben aus der Coordinaten-Theorie und den Kegelschnitten.

1) Welches sind die Coordinaten a, b des Mittelpuncts vom Kreis $y^2 + x^2 - 10y - 5x + 1 = 0$? welches sein Halbmesser r? schneidet die Gerade $y = 3 + 5x$ dessen Peripherie? und wenn dieser Fall eintritt, in welchen Puncten?

R. Es entsteht $a = 2{,}5$; $b = 5$; $r = 5{,}5$ und die Gerade schneidet in den beiden Puncten zu $x = 1{,}4825$; $y = 10{,}4125\ldots$ und zu $x = -0{,}5209$; $y = 0{,}3955\ldots$

2) Welches sind die Coordinaten $a\ b$; $a_1\ b_1$ der Mittelpuncte; und die Halbmesser $r\ r_1$ der beiden Kreise $y^2 + x^2 - 20x - 40 = 0$ und $y^2 + x^2 - 40y + 50 = 0$ und im Fall beide Peripherien sich schneiden, wo liegen die Schneidungspuncte?

R. Es folgt $a = 10$; $b = 0$; $r = 11{,}8321$; $a_1 = 0$; $b_1 = 20$; $r_1 = 18{,}7082$; die Peripherien schneiden sich im Punct zu $x = -0{,}2048$; $y = 2{,}1476$ und in dem zu $x = 13{,}5905$; $y = 9{,}0452$

3) Welche Lage hat die Parabel $(3y - 4x)^2 - 20y - 15x + 125 = 0$ gegen die beiden Coordinaten-Achsen OX und OY und gegen die Gerade $14y - 27x - 20 = 0$?

R. Die Achse der Parabel trifft den Anfangspunct O der Coordinaten; ihr Scheitelpunct entspricht den Coordinaten $x = 3$; $y = 4$; die Gerade hat nur einen Punct mit der Parabel gemein, ist also Tangente an derselben und dieser Punct ist der Endpunct der Ordinate $y = 13$ zur Abscisse $x = 6$.

4) Welchen Flächen-Inhalt hat der Theil der parabolischen Ebene in 3), welcher von dem Theil der Ordinate 13, welcher Sehne der Parabel wird, abgeschnitten ist, und welche Länge hat diese Sehne?

R. Der Inhalt ist $= 16\frac{76}{81}$; die Sehne $= 7\frac{7}{9}$

5) Welche Lagen haben
die Parabel $y^2 - 12y - 2x + 44 = 0$ und
die Ellipse $9y^2 + 25x^2 - 108y - 450x + 2124 = 0$
unter sich und gegen die Coordinaten-Achsen?

R. Die Achse der Parabel läuft parallel mit OX; ihr Scheitelpunct entspricht den Coordinaten $x = 4$; $y = 6$

und ihr Achsenparameter ist $= 2$; der Mittelpunct der Ellipse gehört zu den Coordinaten $x = 9$; $y = 6$; ihre Achsen sind 10 und 6, jene parallel mit OY, diese mit OX; beide Curven schneiden sich in den vier Puncten zu $x = 6{,}2885$, wozu $y = 3{,}8607$ und $= 8{,}1393$, und zu $x = 10{,}9915$, wozu $y = 5{,}2607$ und auch $9{,}7393$ gehört.

6) In einem parabolischen Abschnitt, dessen Sehne normal auf der Achse steht, ist ein diese Sehne und den Bogen berührender Kreis gebildet; den Halbmesser r desselben und die Coordinaten x, y der beiden Berührungspuncte des Kreises mit der Parabel durch die begrenzende Sehne $2b$ und ihre Entfernung a vom Scheitel der Parabel auszudrücken.

$$\text{R.}\ r = \frac{(2a-b)b}{2a};\ x = a - b \text{ und } y = b\sqrt{\frac{a-b}{a}};$$

ein solcher Kreis existirt also nur dann, wenn $a > b$ ist.

Anmerkung. In den: „300 Aufgaben aus der höhern und angewandten Mathematik vom Verfasser. Berlin bei Duncker u. Humblot 1842" ist das Resultat der Lösung dieser Aufgabe irrig.

7) Dieselbe Aufgabe wie in 6), nur soll ein Quadrat statt des Kreises in den parabolischen Abschnitt eingeschrieben sein, und zwar so, daß eine Seite des Quadrats in die Sehne $2b$ fällt.

$$\text{R.}\ x = \frac{1}{a}\left[a^2 + 2b^2 - 2b\sqrt{(a^2+b^2)}\right] \text{ und die}$$

halbe Seite des Quadrats oder $y = \frac{b}{a}\left[-b + \sqrt{(a^2+b^2)}\right]$

Soll eine Ecke des Quadrats mit dem Scheitelpunct, die gegenüberliegende mit der Mitte von $2b$ zusammenfallen, so existirt nur dann das Quadrat, wenn $a = b\sqrt{2}$ ist.

8) In der Achse einer Parabel ist ein Punct A in der Entfernung a vom Scheitelpunct derselben gegeben; die Coordinaten der symmetrisch liegenden Puncte B, C in den beiden Zweigen der Parabel der Bedingnng entsprechend zu be-

stimmen, daß A, B, C die Eckpuncte eines gleichseitigen Dreiecks werden.

R. Bezeichnet b die Ordinate zur Abscisse a; x, y die gesuchten Coordinaten, so wird

$$x = \frac{1}{2a}[2a^2 + 3b^2 \pm b\sqrt{(12a^2 + 9b^2)}]; \quad y^2 = \frac{b^2}{a}x$$

und es entstehen immer zwei solche Dreiecke.

9) In welchen Puncten einer Ebene sieht man zwei in derselben Ebene liegenden Kreise unter gleichen Winkeln?

R. Bezeichnet a die Centrale, r den Halbmesser des größeren, ϱ den des kleineren Kreises, so giebt, wenn der Mittelpunct des größeren Kreises als Anfangspunct O der Coordinaten x, y und a als die Achse OX gewählt wird, die Gleichung

$$y^2 + x^2 - \frac{2ar^2}{r^2 - \varrho^2}x + \frac{a^2r^2}{r^2 - \varrho^2} = 0$$

die Peripherie desjenigen Kreises, in welcher jeder Punct die verlangte Eigenschaft hat. Der Mittelpunct dieses Kreises liegt daher in a in der Entfernung $\frac{ar^2}{r^2 - \varrho^2}$ von O und sein Halbmesser ist $= \frac{ar\varrho}{r^2 - \varrho^2}$. Im Allgemeinen sieht man in jedem Punct dieser Peripherie beide Kreise unter andern, doch immer unter gleichen Winkeln.

10) Durch den Brennpunct einer Parabel, deren Achsen-Parameter $= 6$ ist, eine Sehne zu legen, welche einen Inhalt von 48 abschneidet. Den Winkel dieser Sehne mit der Achse zu bestimmen.

R. 30^0 oder 150^0.

11) Aus dem Brennpunct einer Parabel wird unter dem Winkel φ mit der Achse derselben ein Brennstrahl gezogen; den Flächenraum des gebildeten parabolischen Ausschnitts durch φ und den Achsen-Parameter p auszudrücken.

R. Für jeden Werth von φ kleiner als π, entsteht der verlangte Inhalt $= \frac{p^2}{48}\,\mathrm{tg}\frac{\varphi}{2}\left(3 + \mathrm{tg}^2\frac{\varphi}{2}\right)$

12) Wird die Kugelfläche $z^2 + y^2 + x^2 - r^2 = 0$ von der Ebene $12z + 4y + 3x - 13r = 0$ durchschnitten, berührt, oder haben beide keinen gemeinschaftlichen Punct?

R. Berührt, in dem Punct zu $x = \frac{3r}{13}$; $y = \frac{4r}{13}$; also $z = \frac{12r}{13}$. Wird nämlich z eliminirt, und y dann entwickelt, so folgt $y = \frac{13r - 3x \pm 3i(13x - 3r)}{40}$, woraus die Resultate folgen.

13) Welches ist die gegenseitige Lage der beiden Kugeln
$z^2 + y^2 + x^2 - 8z - 6y - 4x - 7 = 0$ und
$z^2 + y^2 + x^2 - 32z - 14y - 10x + 105 = 0$?

R. Sie durchschneiden sich in der Peripherie einer Kreisebene, deren Halbmesser $= \frac{4}{13}\sqrt{374}$ ist.

14) Welches ist die gegenseitige Lage der beiden Kugeln
$z^2 + y^2 + x^2 - 8z - 6y - 4x - 7 = 0$ und
$z^2 + y^2 + x^2 - 32z - 14y - 10x + 281 = 0$?

R. Die Kugeln berühren sich außerhalb in dem Punct zu $x = \frac{44}{13}$; $y = \frac{63}{13}$; also $z = \frac{124}{13}$

15) Welches ist die gegenseitige Lage der beiden Kugeln
$z^2 + y^2 + x^2 - 8z - 6y - 4x - 7 = 0$ und
$z^2 + y^2 + x^2 - 32z - 14y - 10x - 31 = 0$?

R. Sie berühren sich innerhalb in dem Punct zu $x = \frac{8}{13}$; $y = \frac{15}{13}$; also $z = -\frac{20}{13}$

16) Welcher Kegelschnitt entspricht der Gleichung

$$4y^2 + x^2 - 24y - 12x + 68 = 0;$$

welches ist der Ort der Scheitelpuncte desselben, und welches die Winkel der Achsen gegen die Coordinaten-Achsen?

R. Der Gleichung entspricht eine Ellipse; ihre Achsen laufen parallel mit den Coordinaten-Achsen und ihre vier Scheitelpuncte entsprechen den Coordinaten 4 und 3; 8 und 3; 6 und 2; und 6 und 4.

17) Es sind die Gleichungen $y = a + bx$ und $z = a_1 + b_1 x$ der Projectionen einer Geraden auf die beiden Projections-Ebenen YOX, ZOX gegeben; durch die vier Parameter derselben, also durch a b a_1 b_1 auszudrükken die Parameter a_2 b_2 der Gleichung $z = a_2 + b_2 y$ der Projection derselben Geraden auf die dritte Projections-Ebene YOZ; die Winkel α, β, γ, welche diese Gerade mit den drei Projections-Achsen OX, OY, OZ, so wie auch die α_1 β_1 γ_1 welche sie mit den drei Projections-Ebenen XOY, XOZ und YOZ bildet.

R. Es entsteht $a_2 = \frac{a_1 b - a b_1}{b}$

$$b_2 = \frac{b_1}{b}; \quad \cos^2\alpha = \frac{1}{1 + b^2 + b_1^2};$$

$$\cos^2\beta = \frac{b^2}{1 + b^2 + b_1^2}; \quad \cos^2\gamma = \frac{b_1^2}{1 + b^2 + b_1^2};$$

$$\cos^2\alpha_1 = \frac{1 + b^2}{1 + b^2 + b_1^2}; \quad \cos^2\beta_1 = \frac{1 + b_1^2}{1 + b^2 + b_1^2};$$

$$\cos^2\gamma_1 = \frac{b^2 + b_1^2}{1 + b^2 + b_1^2}$$

18) Welches sind in Beziehung auf 17) die Coordinaten der Durchschnittspuncte der Geraden mit den drei Coordinaten-Ebenen?

R. Der Durchschnittspunct mit XOY entspricht den Coordinaten $x = -\frac{a_1}{b_1}$; $y = \frac{ab_1 - a_1 b}{b_1}$; der mit

XOZ denen $x = -\frac{a}{b}$; $z = \frac{a_1 b - a b_1}{b}$; und der mit YOZ denen $y = a$; $z = a_1$.

19) Eine Gerade bilde mit den drei Coordinaten-Achsen OX, OY, OZ die Winkel α, β, γ und irgend ein Punct dieser Geraden entspreche den Coordinaten $x = a$; $y = b$; $z = c$; hiedurch die Gleichungen der Projectionen dieser Geraden auf die drei Coordinaten-Ebenen und die Coordinaten der Durchschnittspuncte derselben mit ihnen auszudrücken.

R. Es ergeben sich die drei Gleichungen:

$$(y - b)\cos\alpha = (x - a)\cos\beta;$$

$$(z - c)\cos\alpha = (x - a)\cos\gamma \text{ und}$$

$$(z - c)\cos\beta = (y - b)\cos\gamma;$$ ferner für die Ebene XOY die Coordinaten des Durchschnittspunctes $x = a - \frac{c\cos\alpha}{\cos\gamma}$; $y = b - \frac{c\cos\beta}{\cos\gamma}$; für die XOZ die $x = a - \frac{b\cos\alpha}{\cos\beta}$; $z = c - \frac{b\cos\gamma}{\cos\beta}$; und für die YOZ $y = b - \frac{a\cos\beta}{\cos\alpha}$; $z = c - \frac{a\cos\gamma}{\cos\alpha}$

20) In der Entfernung a vom Scheitelpunct einer Parabel ist in der Achse derselben ein Punct gewählt und durch ihn eine Sehne der Parabel unter dem Winkel α mit a gelegt. Durch a, α und den Achsen-Parameter p dieser Parabel den Flächenraum des entstandenen Abschnitts auszudrücken.

R. Er ergiebt sich =

$$\frac{(4ap\sin^2\alpha + p^2\cos^2\alpha)^{\frac{3}{2}}}{6p\sin^3\alpha}$$

21) Wenn in Beziehung auf 20) der Flächenraum $= F$ festgesetzt ist, wie drückt sich dann α durch a, p und F aus?

R. $\cot g \alpha = \sqrt{\left(-\frac{4a}{p} + \sqrt[3]{\frac{36F^2}{p^4}}\right)}$

wozu nur dann ein Werth für α existirt, wenn

$F \geqq \frac{4}{3} a\sqrt{ap}$ ist.

22) In einer parabolischen Linie zum Achsenparameter p wird ein Punct B gewählt, in B die Normale gezogen und diese aus dem Scheitelpunct A mit einer Länge b in C und D geschnitten. Die Abstände dieser Puncte C und D vom Punct B durch p, b und die Achsen-Abscisse a zu B auszudrücken.

R. Sie sind $= \sqrt{\left[b^2 - \frac{a(p+2a)^2}{p+4a}\right]} \pm a\sqrt{\frac{p}{p+4a}}$

woraus nur dann mögliche Resultate entstehen, wenn

$b \geqq (p + 2a)\sqrt{\frac{a}{p+4a}}$ ist.

23) Für welches Verhältniß der beiden Haupt-Achsen einer Ellipse existirt in derselben ein eingeschriebenes Quadrat, dessen Seiten parallel mit den Achsen liegen, und dessen Inhalt halb so groß ist, als der der elliptischen Ebene?

R. Dieses Verhältniß ergiebt sich

wie $4 \pm \sqrt{(16 - \pi^2)}$ zu π

24) Innerhalb eines Winkel-Raumes α alle die Puncte zu bestimmen, für welche die beiden Normalen aus jedem auf die beiden Schenkel von α, Vierecke von gleichem Inhalt a^2 abschneiden.

R. Wird die Spitze des Winkels α als Anfangspunct der rechtwinklichen Coordinaten x, y; der eine Schenkel als Achse der Abscissen x gewählt, so genügen alle Puncte der Hyperbel

$$y^2 - 2xy \operatorname{tg} \alpha - x^2 + \frac{2a^2}{\sin \alpha \cos \alpha} = 0$$

so lange dieselben nicht außerhalb des Winkelraums α fallen.

Der Mittelpunct dieser Hyperbel fällt mit der Spitze des Winkels zusammen; ihre Hauptachse halbirt den Winkel α und ist $= 2a\sqrt{(2 \operatorname{cosec} \alpha)}$ und die Schneidungspuncte der Hyperbel mit den beiden Schenkeln von α liegen in der Entfernung $2a\sqrt{(\operatorname{cosec} 2\alpha)}$ von der Spitze des Winkels α. Ist $\alpha = \frac{1}{2}\pi$, so werden die Schenkel die Asymptoten der Hyperbel.

Der Durchschnittspunct der beiden Hyperbeln, welche zwei Winkeln eines Dreiecks angehören, bestimmt somit den Punct innerhalb desselben, für welchen die drei Normalen aus demselben auf die drei Seiten des Dreiecks den Inhalt desselben in drei Vierecke abtheilen, deren Verhältniß ihrer Inhalte festgesetzt wird.

25) Für welche Puncte in der Achse eines Kegelschnitts werden die normalen Ordinaten rational?

R. 1) Für die Parabel. Bezeichnet p den Achsenparameter, k jede beliebige rationale ganze oder gebrochene Zahl, so ist die Entfernung jedes solchen Punctes vom Scheitelpunct $= k^2 p$ und die zugehörige Ordinate $= kp$.

2) Für die Ellipse. Bleibt die Bedeutung von k und bezeichnen $2a$, $2b$ die beiden Hauptachsen, so ist die Entfernung jedes solchen Punctes auf a vom Mittelpunct $= \frac{2k}{1+k^2}a$ und die zugehörige Ordinate $= \frac{1-k^2}{1+k^2}b$

3) Für die Hyperbel. Behält k seine Bedeutung, ist $2a$ die Hauptachse, $2b$ die Zwergachse, so ist die Entfernung jedes solchen Punctes auf a vom Mittelpunct $= \frac{1+k^2}{2k}a$ und die zugehörige Ordinate $= \frac{1-k^2}{2k}b$

26) Durch einen gegebenen Punct in der Achse einer Hyperbel, innerhalb eines Zweiges derselben, eine Sehne

zu legen, deren beide durch diesen Punct getrennten Theile das Product d^2 erzeugen.

R. Bezeichnet $2a$ die Hauptachse, $2b$ die Zwergachse, c ($> a$) die Entfernung des gegebenen Punctes vom Mittelpunct, und φ den Winkel der verlangten Sehne mit c, so entsteht $\sin^2\varphi = \frac{b^2}{d^2} \cdot \frac{c^2 + d^2 - a^2}{a^2 + b^2}$ und φ existirt nur dann, wenn $d^2 \geqq \frac{c^2 - a^2}{a^2} b^2$ ist. Ist der Brennpunct der gegebene Punct, so folgt
$\sin^2\varphi = \frac{b^2}{d^2} \cdot \frac{b^2 + d^2}{a^2 + b^2}$ und $d \geqq \frac{b^2}{a}$ drückt die Grenze aus.

27) In Beziehung auf die vorige Aufgabe den Werth von φ zu bestimmen, für welchen die absolute Differenz beider Theile den bestimmten Werth d annimmt.

$$\text{R.} \quad \cos\varphi = \frac{-b^2 c \pm \sqrt{[b^4 c^2 + a^2 d^2 (a^2 + b^2)]}}{(a^2 + b^2) d}$$

28) Welchen Werth muß aber φ haben, wenn die ganze Sehne, und zwar durch den Brennpunct gelegt, die Länge s erhalten soll?

$$\text{R.} \quad \sin^2\varphi = \frac{b^2}{a^2 + b^2} \cdot \frac{s + 2a}{s}$$

29) Es sei $a = 15$; $b = 8$; und die Länge der ganzen Sehne, durch den Endpunct von $c = 20$ gelegt, soll $= 100$ werden; welchen Werth muß φ erhalten?

R. Es entspricht sowohl $\varphi = 28^0\ 45'\ 13''$ als auch $\varphi = 27^0\ 54'\ 49''$.

30) Von einer Parabel durch eine Sehne von gegebener Länge b einen Abschnitt von bestimmtem Inhalt F abzuschneiden.

R. Bezeichnet p den Achsen-Parameter, so ergeben sich die Achsen-Ordinaten der Endpuncte dieser Sehne

$$= \frac{1}{2}\left[p\sqrt{\left(\frac{b^2}{(6pF)^{\frac{2}{3}}} - 1\right)} \pm (6pF)^{\frac{1}{3}}\right]$$

und hieraus entspringen nur dann existirende Puncte, wenn $b \geqq (6pF)^{\frac{1}{3}}$ ist.

Beisp. 1) Für $p = 6$; $F = 48$; $b = 36$ werden beide Ordinaten 14,484 ... und 2,484 ...

2) Für $p = 6$; $F = 48$; $b = 13$ werden dieselben $+ 7{,}25$ und $- 4{,}75$.

31) Ein normaler gewöhnlicher Kegel wird schief abgekürzt; den Inhalt K des Ergänzungskegels auszudrücken durch den Halbmesser r der Grund-Ebene und die Höhe h des ganzen Kegels, die Entfernung c von seiner Spitze bis zum Durchschnittspunct der schiefen Ebene mit der Höhe h und den Winkel α welchen h mit dieser Ebene bildet.

$$\text{R.}\quad K = \frac{(c \sin\alpha)^3}{(h^2 \sin^2\alpha - r^2 \cos^2\alpha)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{r^2 \pi h}{3}$$

32) In Beziehung auf die vorige Aufgabe den Werth von α zu bestimmen, für welchen der Inhalt des entstehenden schief abgekürzten Kegels sich zum Ganzen wie n zu m verhält.

$$\text{R.}\quad \sin\alpha = \frac{r}{\sqrt{\left[r^2 + h^2 - \left(1 - \frac{n}{m}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot c^2\right]}}$$

woraus, als Grenze, $c < \sqrt[3]{\left(1 - \frac{n}{m}\right)} \cdot \sqrt{(r^2 + h^2)}$ folgt.

Beispiel. Zu $r = 5$; $h = 12$; $\frac{n}{m} = \frac{2}{3}$ und $c = 8$ folgt $\alpha = 56^\circ\ 35'\ 38''$.

Bayerische Staatsbibliothek MÜNCHEN

Anhang.

XIV. Aufgaben welche auf transcendente Gleichungen führen.

---

1) Welche Zahl ist es, die sowohl zum Dignanden als zum Exponenten genommen, die Potenz 17 liefert?

R. 2,7746 . . .

2) Welche Zahl giebt, wenn sie sowohl zum Radicanden als zum Wurzelexponenten genommen wird, die Wurzel $\frac{7}{5}$?

R. 1,88666 . . .

3) Die Wurzelexponenten zu den Radikanden 11 und 17 sind um 3 verschieden und zwar ist der zu 11 der größere; beide Wurzeln verhalten sich wie 4 zu 5; welches ist der Wurzelexponent zum Radikanden 17?

R. Sowohl 5,66942 . . . als auch — 6,71857 . . .

4) Welche Zahl ist um 642 größer als das 50 fache ihres briggischen Logarithmen?

R. 786,7931 . . .

5) Für welchen Kreisbogen zum Halbmesser Eins verhält sich der Sinus desselben zum briggischen Logarithmen der Zahl, welche diese Bogenlänge ausdrückt, wie 3 zu 5?

R. 6,80678 . . ., wozu 390° sehr nahe paßt.

6) Zu welchem Mittelpunctswinkel ist der Inhalt des Kreis-Abschnitts halb so groß als das Quadrat des Halbmessers dieses Kreises?

R. Zu 110° 50′ 30″...

7) Welcher Kreisausschnitt wird durch seine die Endpuncte des Bogens verbindende Sehne halbirt?

R. Der zu 108° 36′ 13″...

8) Welche Sehne theilt die Ebene eines Kreises in zwei Kreisabschnitte, die sich wie 1 zu 2 verhalten?

R. Die zum Mittelpunctswinkel von 149° 16′ 30″

9) Für welchen Mittelpunctswinkel eines Kreises verhält sich der Inhalt des Kreisabschnitts zu dem des Kreisausschnitts wie 8 zu 7?

R. 211° 53′ 30″

10) Um zwei in einer Ebene liegende den Halbmessern r und ϱ zugehörige Kreisscheiben soll ein angespannter Riemen von der Länge $2a$ passen. Wie groß muß die Centrale sein?

R. Bezeichnet x die Länge derselben und 2φ die Bogenlänge zum Halbmesser Eins für den kleineren Bogen zwischen den Ablösungsstellen des Riemen, so bestimmen sich x und φ aus den Gleichnngen $\operatorname{tg}\varphi - \varphi - \dfrac{a - r\pi}{r - \varrho} = 0$ und $x\cos\varphi = r - \varrho$. Für $r = 4$; $\varrho = 3$; $a = 30$ folgt $x = 18{,}9844$ und der Winkel zu $\varphi = 86° \, 58' \, 50''$

11) Dieselbe Aufgabe, wenn der Riemen verschlungen angebracht werden soll.

R. Bei derselben Bezeichnung werden hier die Gleichungen:

$$\operatorname{tg}\varphi - \varphi + \pi - \frac{a}{r + \varrho} = 0 \text{ und } x\cos\varphi = r + \varrho$$

Für den Zahlenfall folgt $x = 17{,}592$ und der Winkel zu $\varphi = 66° \, 33'$

12) Ein normales Parallelepipedum hat reguläre Viel-

ecke zu Grund-Ebenen, 360 Cubicfuß Inhalt und 312 Quadratfuß Begränzungs-Ebene; seine Höhe ist 10 Fuß. Die Anzahl y der Seiten jeder Grundebene und die Länge x jeder derselben zu bestimmen.

R. Der entstehenden Eliminations-Gleichung $x - 6 \operatorname{tg} \frac{15x}{2} = 0$ entspricht $x = 6$ und dann folgt $y = 4$

13) Ein Bogen eines größten Kreises einer Kugel sei $= 30$ Fuß; die Peripherie des durch die Endpuncte dieses Bogens, normal auf seine Ebene gelegten Durchschnittskreises sei $= 40$ Fuß. Den entsprechenden Mittelpunctswinkel φ und den Halbmesser r dieser Kugel zu bestimmen.

R. $\varphi = 237^{0}\ 8'$; $r = 7{,}24838 \ldots$

14) Aus dem Scheitelpunct einer Parabel wird eine Sehne unter dem Winkel φ mit der Achse gelegt und mit derselben aus dem Scheitelpunct ein Kreisbogen beschrieben, bis er die beiden Zweige der Parabel trifft. Es soll der von der parabolischen Linie und dem Kreisbogen eingeschlossene ebene Raum den bestimmten Inhalt a^2 erhalten; wie ist dieser Bedingung entsprechend der Werth von φ zu bestimmen, wenn außer a^2 auch noch der Achsenparameter p der Parabel gegeben ist.

R. Die transcendente Gleichung

$$6\varphi + \sin 2\varphi - \frac{6a^2}{p^2} \sin^2\varphi \cdot \operatorname{tg}^2\varphi = 0$$

bestimmt φ.

Ist $p = 6$; $a^2 = 36$; so wird der Winkel zu φ nahe $= 52^{0}\ 35'\ 30''$ und die Sehne $= 5{,}776884 \ldots$

Gedruckt bei A. W. Schade, Grünstr. 18.

In demselben Verlage sind folgende mathematische Werke erschienen:

Von dem Verfasser dieses Buches:

Die reine Mathematik
und die mechanischen Wissenschaften.

Zum Leitfaden für den Lehrer, zur Ergänzung für den Schüler bearbeitet.

Mit 1 Figurentafel. gr. 8. $1\frac{1}{2}$ Thlr.

Dreihundert Aufgaben
aus der höhern und angewandten Mathematik ohne die Auflösungen aber mit Angabe der Resultate.

Zur Uebung für Lernende und zur Bequemlichkeit für Lehrer und Examinatoren.

Mit 1 Figurentafel. gr. 8. $\frac{3}{4}$ Thlr.

Kurzer Leitfaden
für den Vortrag der höheren Analysis, höheren Geometrie und angewandten Mechanik.

Mit 1 Figurentafel. gr. 8. 1 Thlr.

Meier Hirsch
Sammlung von Beispielen, Formeln und Aufgaben aus der Buchstabenrechnung und Algebra.

Sechste, durchgesehene Ausgabe. gr. 8. $1\frac{1}{3}$ Thlr.

Von demselben Verfasser:

Fortsetzung der Sammlung von Beispielen, Formeln und Aufgaben aus der Buchstabenrechnung und Algebra; oder Sammlung von Aufgaben aus der Theorie der algebraischen Gleichungen. 1r Theil. 8. $1\frac{2}{3}$ Thlr.

Sammlung geometrischer Aufgaben.

1ster Theil (Planimetrie und Trigonometrie). Mit 10 Kupfertaf. 8. $1\frac{2}{3}$ Thlr.

2ter Theil (Polygonometrie, Stereometrie, sphär. Trigonometrie). Mit 10 Kupfertafeln. 8. $1\frac{2}{3}$ Thlr.

3ter Theil (Analyt. Geometrie der Ebene), von L. Imm. Magnus. Mit 4 Kupfertafeln. Lexikon 8. $2\frac{5}{6}$ Thlr.

4ter Theil (Analyt. Geom. des Raumes), von L. Imm. Magnus. Lexikon 8. $2\frac{5}{6}$ Thlr.

Commentare zu Meier Hirsch:

Egen, P. N. C., Handbuch der allgemeinen Arithmetik. Besonders in Beziehung auf die „Sammlung von Beispielen, Formeln und Aufgaben aus der Buchstabenrechnung und Algebra von Meier Hirsch“. Theil I. Die Buchstabenrechnung. Dritte verbesserte Aufl. Mit 1 Kpfr. gr. 8. 2 Thlr.

Egen, P. N. C., desselben Werkes Theil II. Die Algebra. Zweite verbesserte Aufl. Mit 4 Kpfrn. gr. 8. 2⅓ Thlr.

Sachs, Sal., Auflösungen der in Meier Hirsch's Sammlung aus der Buchstabenrechnung und Algebra enthaltenen Gleichungen und Aufgaben. 6te verbesserte Aufl. 8. 1⅔ Thlr.

Boltze, H. L., Lehrbuch der Statik und Mechanik fester Körper für Schulen und den Selbstunterricht. Mit 4 Kupfertafeln. gr. 8. ⅞ Thlr.

Gruson, J. Ph., die Kegelschnitte; elementarisch, geometrisch, algebraisch, zum Behuf der Vorlesungen abgehandelt. 8. Mit 4 Kupfern. 1⅓ Thlr.

Huberdt, A., Elemente der ebenen Trigonometrie nebst praktischen Aufgaben für Gymnasien und höhere Bürger- und Militärschulen. Mit 1 Figurentafel. gr. 8. ¼ Thlr.

— Lehrbuch der Stereometrie für Schulen. Mit 1 Figurentafel. gr. 8. ⅓ Thlr.

La Croix, Sylv. Fr., Anfangsgründe der Arithmetik. Nach der 17ten Originalausgabe aus dem Französischen übersetzt, und mit einigen Anmerkungen versehen. gr. 8. ⅔ Thlr.

— — die Anfangsgründe der Algebra. Aus dem Französischen übersetzt nach der zwölften verb. u. verm. Ausgabe, von J. Ph. Gruson. gr. 8. 1⅓ Thlr.

Auch unter dem Titel:

Sylv. Fr. Lacroix's Algebra. Erster Theil. Anfangsgründe &c. Derselben 2ter Band oder weitere Ausführung, übersetzt von Elk. Marc. Hahn. 8. 1⅔ Thlr.

La Croix, Sylv. Fr., Lehrb. der Elementar-Geometrie. (Nach der 13ten Auflage aus dem Franz.) neu übersetzt und mit Anmerk. versehen von L. Ideler. gr. 8. Mit 7 Kupfertafeln. 1⅓ Thlr.

— — weitere Ausführung zu seiner Geometrie, oder Versuch einer Geometrie über die ebenen und krummen Oberflächen, nebst Anfangsgründe der Perspektive, zum besondern Gebrauch für Architekten, und für die ausübenden Meßkünstler überhaupt. Aus dem Französ. übers. von E. M. Hahn. Mit 10 Kupfert. gr. 8. 1⅙ Thlr.

— — Anleitung zur ebenen und sphärischen Trigonometrie und zur Anwendung der Algebra auf die Geometrie. Uebersetzt und mit erläuternden Anmerkungen versehen von Dr. L. Ideler. Mit 6 Kupfert. Zweite, verb. Ausg. gr. 8. 1½ Thlr.

Weitere Ausführung hiervon, siehe Puissant.

Ohm, Martin, der Geist der mathematischen Analysis und ihr Verhältniß zur Schule. Erste Abhandlung. Auch als Anhang und Commentar zu seinen verschiedenen Lehrb. gr. 8. 1 Thlr.

Plücker, Dr. Jul., System der analytischen Geometrie, auf neue Betrachtungsweisen gegründet, und insbesondere eine ausführliche Theorie der Curven dritter Ordnung enthaltend. Mit 6 Kupfertafeln. gr. 8. 3½ Thlr.

Puissant, L., Sammlung verschiedener Aufgaben der Geom., aufgelöst und bewiesen durch die algebraische Analysis; als weitere Ausführung zu Lacroix's Trigonometrie. Aus dem Franz. übersetzt von Elk. Marc. Hahn. Mit 2 Kupf. gr. 8. ⅔ Thlr.

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Lehmus, D. C. L.

Algebraische Aufgaben aus dem ganzen Gebiet der reinen Mathematik mit Angabe der Resultate

Berlin 1846

Math.p. 740 z
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10083297-4